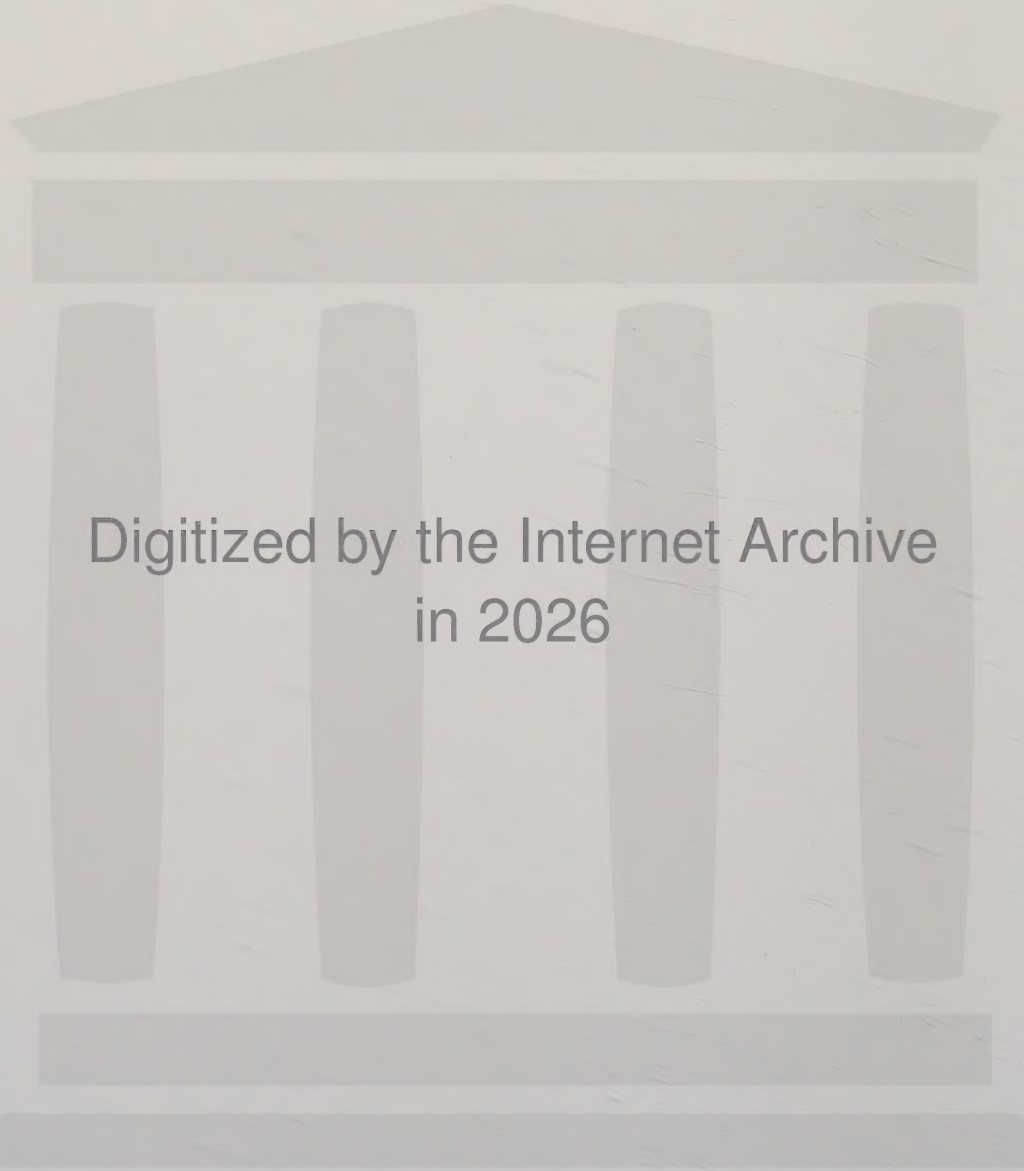


THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES PHYSIQUES
présentée
à la FACULTE des SCIENCES de PARIS
par M. Philippe CHAVANON
pour obtenir
le grade de Docteur Es-Sciences

Contribution à l'étude de la
réaction $p\pi^+ \rightarrow p\pi^+\pi^0$ entre 1,6
et 2 GeV

Soutenue le 21 10 1971 devant la Commission d'Examen

Président : M. PERRIN
Examineurs: M.M. BERTHELOT,
VALLADAS, FROISSART



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556020_0030

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

de PARIS

par

M. Philippe CHAVANON

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Contribution à l'étude de la réaction $p\pi^+ \rightarrow p\pi^+\pi^0$
entre 1,6 et 2 GeV.

Soutenue le 21 Octobre 1971

devant la Commission d'Examen

MM. FERRIN

Président

BERTHELOT

Examineurs

VALLADAS

FROISSART



TABLE DES MATIERES

=====:====:

	pages
I INTRODUCTION	1
II ANALYSE EN ONDES PARTIELLES DE LA REACTION $p\pi^+ \rightarrow p\pi^+\pi^0$	
A - Choix des référentiels	5
B - Choix des variables	6
C - Couplage symétrique des spins	8
D - Couplage ℓ -s	10
1°) Etat initial	
2°) Etat final	11
E - Décomposition sur les états d'isospin	14
F - Amplitudes de transition	15
G - Expression de la section efficace différentielle	16
1°) Introduction du modèle isobarique	17
2°) Développement en harmoniques sphériques de la direction incidente	18
H - Normalisation des amplitudes d'ondes partielles	20
J - Propriétés dues à la conservation de la parité	22
K - Cas où les masses des pions sont égales	23
L - Développement de la section efficace différentielle avec le système d'axes $O\xi'\eta'\zeta'$	25
III ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	27
A - Effets liés à la production du dipion	29
B - Effets liés à la production du Δ (1236)	33

	C - Section efficace différentielle	34
IV	DETERMINATION DES AMPLITUDES D'ONDES PARTIELLES	39
	A - Choix des ondes partielles et des isobares	39
	B - Détermination des amplitudes d'ondes partielles	41
	1°) Calculs préalables	41
	2°) Application de la méthode des moindres carrés	42
	3°) Choix d'une phase de référence	43
	4°) Obtention et tri des solutions	45
	C - Les résultats	48
	1°) Indétermination des phases	
	2°) Comparaison avec les sections efficaces inéla- tiques	49
	3°) Variations en modules des amplitudes d'ondes partielles	50
	D - Evaluation d'une largeur partielle	52
	E - Calcul des amplitudes d'ondes partielles de produc- tion du ρ par échange d'un pion	53
	F - La réaction $p\pi^+ \rightarrow n \pi^+ \pi^+$	56
V	CONCLUSION	59
	Appendice A : Notations	61
	Appendice B : Liaison avec le formalisme de Deler et Valladas	64

I - I N T R O D U C T I O N

+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=

Les succès obtenus dans l'analyse en ondes partielles des réactions élastiques pion-nucléon ont conduit à étendre ce type d'analyse aux réactions inélastiques les plus simples, celles qui donnent lieu à la création d'un seul pion.

L'étude de ces réactions est en cours à Saclay depuis plusieurs années ; des expériences de chambre à bulles ont été faites à 1,64 ; 1,78 ; 1,90 ; 1,97 GeV d'énergie totale dans le centre de masse de manière à compléter les résultats disponibles grâce à d'autres laboratoires. Actuellement des clichés sont en cours d'exploitation pour augmenter le nombre des événements obtenus lors de précédentes expériences ou pour compléter la gamme des énergies, ceci aussi bien à Saclay, qu'à Berkeley et à Londres.

L'interprétation de ces résultats repose essentiellement sur l'utilisation du modèle isobarique généralisé par Deler et Valladas ⁽¹⁾. Théoriquement cette généralisation permet de tenir compte de tous les isobares produits dans la réaction et de toutes les ondes dans lesquelles ils sont produits. Pratiquement ces possibilités sont cependant limitées par la complexité du travail de programmation correspondant et par la durée d'utilisation du calculateur.

Ainsi, dans cette étude, notre contribution s'est cantonnée à la réaction $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^0$ que, dans le cadre du modèle isobarique, nous avons décomposée en trois mécanismes

$$\pi^+ p \rightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \Delta^+ & \pi^+ \\ \Delta^{++} & \pi^0 \\ \rho^+ & p \end{array} \right\} \rightarrow p \pi^+ \pi^0$$

Ces trois mécanismes, aux énergies comprises entre 1,5 et 2 GeV, impliqueraient 27 ondes parmi lesquelles nous n'en avons utilisé que 18.

A partir du travail de Moussa et Stora ⁽²⁾ et nous aidant du cours de Mahoux ⁽³⁾ nous avons préalablement tenté de présenter l'application à la réaction $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^0$ du formalisme relativiste de l'analyse en ondes partielles.

Dans le cas de la réaction élastique pion-nucléon cette analyse permet, à partir de la théorie de la diffusion, mais sans toutefois faire appel à un modèle proprement dit, d'étudier le comportement des amplitudes dans le plan complexe et de caractériser ainsi des états résonnants que l'on peut ensuite essayer de classer au moyen du groupe de symétrie unitaire SU_3 et de la notion de trajectoire de Regge.

Lorsque l'on passe aux réactions inélastiques, si l'état final comporte trois particules, abstraction faite de la polarisation, l'amplitude ne dépend plus seulement d'un angle polaire et de l'énergie totale mais encore d'un angle azimutal et des énergies de deux paires de particules finales. Comme l'étude de ces réactions montre que ces paires sont produites préférentiellement dans les états résonnants connus, on peut essayer de fixer la dépendance de l'amplitude par rapport aux énergies des sous-systèmes à partir des résultats de l'étude de la diffusion élastique. L'un des moyens d'y parvenir est d'employer le modèle isobarique dont le principe consiste à supposer que la réaction se décompose en deux temps : lors de la collision, le premier état qui se forme se désintègre, soit en les particules initiales, si la réaction est élastique, soit en une particule et une résonance intermédiaire qui se désintègre à son tour.

L'amplitude de cette désintégration est supposée connue à partir de la réaction élastique ou d'une autre réaction s'il s'agit du dipion. Si le premier état est alors identifié à une résonance connue, un Δ dans notre cas, on peut

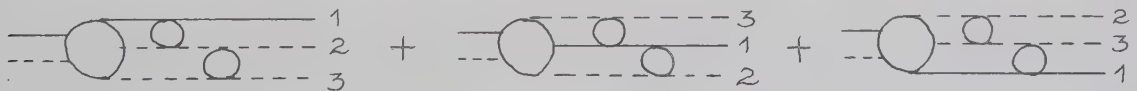
relier l'inélasticité qui lui est attribuée à la production des résonances intermédiaires.

Cependant cette production, dans le cas du ρ par exemple, implique des mécanismes périphériques. C'est pourquoi nous avons calculé, en suivant les prescriptions de Bijtebier ⁽⁴⁾, les projections, sur les ondes partielles, de l'amplitude de production du ρ par échange d'un pion. Ces projections peuvent être comparées aux amplitudes obtenues avec le modèle isobarique.

Les trois mécanismes utilisés pour décrire la réaction peuvent interférer c'est-à-dire que, pour un même événement, le modèle permet de tenir compte des trois résonances intermédiaires possibles. Ceci provient du fait que l'amplitude est écrite sous forme de trois sommes de termes d'ondes partielles relatives aux trois mécanismes qui peuvent être schématisés de la manière suivante :



Cependant Smadja a montré ⁽⁵⁾, à partir de relations de discontinuité que doit satisfaire l'amplitude, que l'on devrait aussi y faire figurer des termes de rediffusion dans l'état final du type :



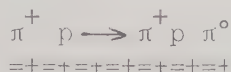
Ces termes ne peuvent pas figurer dans une amplitude isobarique car ils sont incompatibles avec les hypothèses du modèle. On pourrait donc estimer l'importance

tance de ces effets de rediffusion dans la mesure où, à l'aide du modèle, on ne réussirait pas à rendre compte des résultats expérimentaux.

Cependant, comme nous sommes limités à dix-huit ondes et à trois résonances intermédiaires, il faudrait trouver des effets spécifiques qui permettent de distinguer entre les insuffisances fondamentales du modèle et les limitations dûes à la complexité de son utilisation.

II - ANALYSE EN ONDES PARTIELLES DE LA REACTION

=====



Nous nous proposons d'appliquer au cas de cette réaction les méthodes d'analyse angulaire relativiste (2,3,6,7) et de retrouver ainsi la formulation du modèle isobarique de Deler-Valladas (1) qui est à l'origine de l'étude des réactions $\pi N \longrightarrow N \pi \pi$ en cours à Saclay.

A - Choix des référentiels

A chaque étape de l'analyse, c'est-à-dire chaque fois que l'on choisit une manière de composer les moments angulaires, on définit également, de façon à simplifier les calculs, un référentiel. Pour plus de clarté nous indiquons d'emblée quels seront ces référentiels. (Les notations sont expliquées dans l'appendice A).

Chaque événement est d'abord donné par les composantes des quadri-impulsions des particules dans un système O x y z, fixe dans le laboratoire.

Puis par une translation le long de la direction incidente, on déduit des axes précédents un système lié au centre de masse général de la réaction, soit O X Y Z.

Cependant les calculs seront plus simples en utilisant des axes liés à l'ensemble des trois impulsions finales ; deux possibilités seront utilisées pour définir de tels axes :

$$\begin{array}{lll} O\xi\eta\zeta & O\zeta = \vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 / |q_1||q_2| & O\xi = \vec{q}_1 / |q_1| \\ O\xi'\eta'\zeta' & O\zeta' = -\vec{q}_k / |q_k| & O\eta' = \vec{q}_k \wedge \vec{q}_n / |q_k||q_n| \end{array}$$

Le premier trièdre permet d'exprimer symétriquement les quantités relatives aux sous-systèmes $\pi^+ p$ et $\pi^0 p$ tandis que le second est mieux adapté à l'étude de la production du dipion ou d'une résonance ($N \pi$).

B - Choix des variables

Cinq variables indépendantes permettent de décrire, sans tenir compte des spins, une collision du type $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3$

L'analyse en ondes partielles conduit à choisir:

- l'énergie totale W ;
- les masses carrées invariantes de deux paires de particules finales, soient w_n^2 et w_k^2 , qui définissent un point dans le diagramme de Dalitz;
- les angles Θ, Φ qui donnent dans $O\xi\eta\zeta$ la direction OZ des pions incidents. Les angles d'Euler (γ, Θ, Φ) caractérisent la rotation qui fait passer de $OXYZ$ à $O\xi\eta\zeta$. L'angle γ précise la position du système final autour de la direction OZ et il est inutile de l'expliciter en l'absence de polarisation des particules cibles.

Les axes $O\xi\eta\zeta$ étant définis à partir des impulsions des particules finales, c'est l'état initial qui est produit dans une direction variable tandis que l'état final est toujours obtenu dans le même plan de coordonnées où l'une des impulsions a une orientation déterminée.

Pour une énergie totale et des masses fixées l'état initial est défini par les angles Θ, Φ , l'état final par w_n^2 et w_k^2 .

Dans le centre de masse l'amplitude de la réaction peut s'écrire

$$^T \mu_i \mu_f (q_p, q_\pi; q_1, q_2, q_3) = \langle [q_1] \mu_f q_2 q_3 | T | [q_p] q_\pi \mu_i \rangle$$

Les vecteurs d'états utilisés sont les vecteurs de base du produit tensoriel des espaces de représentation du groupe de Poincaré correspondant à chaque particule.

La notation $[q]$ rappelle que l'on a fait choix d'une base de spin, liée à l'impulsion, pour mesurer le spin de la particule ou du système.

$$\begin{aligned} \langle [q_1] \mu_f q_2 q_3 | &= \langle q_1, \frac{1}{2}, \mu_f | \otimes \langle q_2, 0 | \otimes \langle q_3, 0 | \\ | [q_p] \mu_i q_\pi \rangle &= | [q_p] \frac{1}{2} \mu_i \rangle \otimes | q_\pi, 0 \rangle \end{aligned}$$

Effectuer une analyse en ondes partielles consiste à réduire ces produits de représentation en une somme de représentations irréductibles caractérisées par l'énergie, le spin total du système, et des paramètres de dégénérescence qui dépendent du mode de couplage des spins c'est-à-dire de la façon de procéder à la réduction. Les états de base de chacune de ces représentations sont ensuite distingués par la valeur de la projection du spin total.

Nous indiquerons d'abord comment, en chaque point du diagramme de Dalitz, on peut obtenir des états de moment angulaire total J par un couplage dit symétrique car toutes les particules y sont traitées de la même manière.

Les formules de ce couplage ne sont pas utilisées par la suite mais la façon d'y parvenir permet de mieux comprendre et de justifier en quelque sorte les choix indiqués pour les variables et les référentiels.

Ensuite nous effectuerons un couplage en cascade (ou $U - s$) consistant à réduire d'abord le produit des représentations de deux des particules, puis le produit des représentations obtenues avec celle de la troisième particule. Ce couplage fait apparaître les nombres quantiques auxquels l'utilisation du modèle isobarique permet d'attribuer des valeurs déterminées (spin $3/2$ du Δ , spin 1 du ρ) et qui ne sont autres que les paramètres de dégénérescence mentionnés précédemment.

C - Couplage symétrique des spins

Etats propres du moment angulaire pour trois particules.

Les coordonnées, dans le diagramme de Dalitz, du point correspondant à l'état final $[[q_1] \mu_f; q_2; q_3]$ définissent la forme du triangle des impulsions, c'est-à-dire un type d'événements qui ne diffèrent entre eux que par l'orientation de ce triangle. Cette orientation est repérée à partir d'une position de référence (d'indice u) définie dans les axes O X Y Z par

$$\vec{q}_{1u} \wedge \vec{q}_{2u} = OZ \qquad \vec{q}_{1u} = OX$$

autrement dit, dans la position de référence, le plan des trois impulsions finales est normal à la direction incidente et l'impulsion du proton final coïncide avec O X. La position courante du triangle est alors définie par la rotation

$$R(\gamma, \Theta, \phi) \text{ qui fait passer de } O X Y Z \text{ à } O \xi \eta \zeta$$

Dans la position de référence, pour chaque particule de spin non nul, on définit alors une base, composée de trois quadrivecteurs-orthogonaux entre eux et à l'impulsion- et sur laquelle on projette l'opérateur de spin J. Celui-ci se transformant aussi comme un quadrivecteur ses composantes sur cette base seront invariants.

La base de spin du proton est ainsi définie par

$$n_{ju}(q_1) = [q_{1u} \leftarrow \hat{q}_1] n_{ju}(\hat{P})$$

$[q_{1u} \leftarrow \hat{q}_1]$ étant la transformation de Lorentz pure qui fait passer du vecteur $\hat{q}_1 = (m, 0, 0, 0)$ au vecteur q_{1u} . Cette transformation est notée habituellement

$[q_{1u}]$. Pour la position courante nous aurons

$$q_i = R \cdot q_{iu} \qquad \text{et } n_j(q_1) = [q_1] \cdot R \cdot n_{ju}(\hat{P})$$

En bref, pour chaque point du diagramme de Dalitz on a défini la position du système et les bases de spin à partir d'une configuration de référence ayant

subi la rotation R.

On peut alors écrire les vecteurs d'états $|[q_1], 1/2, \mu_f\rangle \otimes |q_2, 0\rangle \otimes |q_3, 0\rangle$
sous la forme $R \left| [\overset{\circ}{P}]_u, w_k^2, w_n^2, \mu_f \right\rangle$

$[\overset{\circ}{P}]_u$ indique donc que le centre de masse général est au repos et que la base de spin est choisie, soit O X Y Z ; μ_f est la composante, invariante, du spin du nucléon sur $\vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2$

Pour les vecteurs d'états de la base d'impulsion on a ainsi défini un changement de variables dont le jacobien est donné par :

$$\frac{d^3 q_1}{2 q_1^0} \frac{d^3 q_2}{2 q_2^0} \frac{d^3 q_3}{2 q_3^0} = \frac{1}{32 w^2} d^4 P \, d w_k^2 \, d w_n^2 \, d R$$

On peut alors définir les états de moment angulaire total J en utilisant comme fonction d'onde $\overline{\mathcal{D}}_{J_z J_\zeta}^J(R)$ soit :

$$|[\overset{\circ}{P}] J J_z J_\zeta w_k^2 w_n^2 \mu_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int \overline{\mathcal{D}}_{J_z J_\zeta}^J(R) \, R |[\overset{\circ}{P}]_u w_k^2 w_n^2 \mu_f\rangle \, dR \quad (\text{II-2})$$

J_z et J_ζ sont les projections de J sur n_{3u} ($\overset{\circ}{P} = OZ$) et n_3 ($\overset{\circ}{P} = O\zeta$)

Ceci peut se montrer de la manière suivante :

Explicitons l'intégration sur le premier angle d'Euler γ de la rotation R : $\overline{\mathcal{D}}_{J_z J_\zeta}^J$ contient le facteur $\exp. (i J_z \gamma)$,
l'opérateur R contient le facteur $\exp. (i \vec{J} \cdot \vec{OZ} \cdot \gamma)$; soit J_3 la valeur propre du générateur $\vec{J} \cdot \vec{OZ}$: l'intégration sur γ fait apparaître une fonction $\delta_{J_z J_3}$ ce qui signifie que l'on a sélectionné les états dont la projection du moment angulaire total sur OZ vaut J_z . Le même raisonnement est valable pour l'intégration sur l'angle ϕ de la rotation autour de O ζ , cette fois, puisqu'il s'agit du troisième angle d'Euler.

La description de l'état final se fait maintenant avec les trois variables discrètes J, J_z , J_ζ au lieu des trois angles γ, Θ, ϕ .

Deux angles suffisent par contre à préciser l'orientation des états à deux corps c'est pourquoi les états de moment angulaire se définissent

dans ce cas par la valeur d'une seule projection du spin total.

Nous avons rappelé la construction des états de couplage symétrique dans l'optique habituelle : un état d'orientation variable décrit dans des axes fixes (d'orientation fixe par rapport au laboratoire). Cependant nous adoptons dans la suite de ce travail la convention, ou le langage, inverse :

- l'état initial a une orientation variable dans les axes $O\xi\eta\zeta$ liés au système final et considérés comme fixes.

La définition (II-2) reste valable ; J_z est une valeur donnée de la composante du spin total sur tous les axes OZ déduits de $O\xi$ par rotation.

D - Couplage $\ell-s$

1 - Etat initial

Nous ferons d'abord le changement de variables

$$q_p, q_\pi \rightarrow \vec{P} = W, \Theta, \Phi.$$

pour exprimer les vecteurs d'états sous la forme $|\vec{P}, \Theta, \Phi, \mu_i\rangle$ dans le référentiel $O\xi\eta\zeta$. Le jacobien correspondant est obtenu à partir de

$$\frac{d^3 q_p}{2q_p^0} \frac{d^3 q_\pi}{2q_\pi^0} = \frac{q_i}{4W} d^3 P \sin\Theta d\Theta d\Phi$$

on peut alors définir des états de moment angulaire total J par

$$|\vec{P}, J, J_z, L, \mu_i\rangle = \left(\frac{2L+1}{4\pi}\right)^{1/2} \left\langle \begin{matrix} 1/2 & L \\ \mu_i & J_z - \mu_i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_z \end{matrix} \right\rangle \int \bar{\mathcal{D}}_{J_z - \mu_i, 0}^L(\Phi, \Theta, 0) |\vec{P}, \Theta, \Phi, \mu_i\rangle \sin\Theta d\Theta d\Phi \quad (\text{II-3})$$

L est un paramètre de dégénérescence de la représentation J

Dans la définition des états à deux particules la formule (II-3) substitue aux angles Θ, Φ les deux variables discrètes J et J_z et le paramètre L, lié d'ailleurs à la parité.

On déduit de (II-3) le coefficient de Clebsch-Gordan qui relie

les deux représentations

$$\langle [\overset{\circ}{P}] J J_{\zeta} L \mu_i \mid [\overset{\circ}{P}] \ominus \phi \mu_i \rangle = \left(\frac{4W}{q_i} \right)^{1/2} \left\langle \begin{matrix} 1/2 & L \\ \mu_i & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_{\zeta} \end{matrix} \right\rangle_{Y_L^M}^M (\ominus \phi) \quad (\text{II-4})$$

2 - Etat final

Dans ce cas un premier couplage fait apparaître le spin de l'isobare qui est supposé se former dans la réaction puis un second couplage met en évidence le spin total J et le moment orbital L' entre l'isobare et la troisième particule. De cette façon on obtient des ondes partielles $(L, L', 2J)$ relatives à la production de l'isobare correspondant.

Pour la réaction que nous étudions les états de couplage ℓ -s sont définis par le coefficient de Clebsch-Gordan :

$$\langle [\overset{\circ}{P}] w_k^2 w_n^2 \mu_F \mid [\overset{\circ}{P}] J J_{\zeta} L'_k j_k \ell_k w_k^2 \mu_F \rangle = \left(32 W^2 \frac{4W}{q_k} \frac{4w_k}{q_k^*} \right)^{1/2} e^{-i\Omega_k \mu_F} \sum_m \left\langle \begin{matrix} 1/2 & \ell_k \\ \mu_F & m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_k \\ m + \mu_F \end{matrix} \right\rangle Y_{\ell_k}^m \left(\frac{\pi}{2}, \theta_k, -\theta_k^* \right) \left\langle \begin{matrix} j_k & L'_k \\ m + \mu_F & M' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_{\zeta} \end{matrix} \right\rangle_{Y_{L'_k}^{M'}}^M \left(\frac{\pi}{2}, \theta_k \right) \quad (\text{II-5})$$

$L'_k j_k \ell_k$ sont relatifs à la paire de particules finales d'indice k . Ω_k est l'angle de la rotation de Wigner du repère de spin du nucléon. Comment détermine-t-on les arguments des harmoniques sphériques de la formules (II-5)?

Considérons le premier couplage : la quadri-impulsion relative des deux particules finales concernées est définie par

$$q_{h,n} = q_n - \frac{q_n q'_k}{q'_k{}^2} q'_k \quad \text{qui implique} \quad q_{hn} \cdot q'_k = 0$$

On applique alors la transformation de Lorentz pure $[q'_k]^{-1}$ telle que

$$[q'_k]^{-1} q'_k = (w_k, 0, 0, 0)$$

d'où

$$\tilde{q}_{h,n} = [q'_k]^{-1} q_{h,n} = \vec{q}_n^*$$

$\vec{q}_n^*$ est la partie spatiale de l'impulsion de la particule n, évaluée dans le centre de masse du système (n,h).

Le choix de ce vecteur $\vec{q}_{h,n}$ constitue simplement un changement de notations dans la définition de l'état à deux particules

$$| [q_n], \sigma_n \rangle \otimes | [q_h], \sigma_h \rangle = | [q'_k], \vec{q}_{hn} \sigma_h \sigma_n \rangle$$

Mais le vecteur $\vec{q}_{hn}$, lors d'une transformation de Lorentz A, se transforme par une rotation (il est purement spatial) dont l'argument, $([Aq'_k]^{-1} A [q'_k])$, est celui qui intervient dans les rotations des repères de spin de chaque particule, ce qui rend possible la réduction du produit des représentations de ces rotations.

Les arguments de $Y_{\ell_k}^m$ dans la formule (II-5) sont les coordonnées angulaires de $\vec{q}_{h,n}$ dans les axes n_k ($\vec{P} = 0 \xi \eta \zeta$)

Le même raisonnement, pour le second couplage, montre que les arguments de $Y_{L_k}^{M'}$ sont les coordonnées angulaires de $\vec{q}_k$, $n_h = \vec{q}'_k$ dans les axes $0 \xi \eta \zeta$

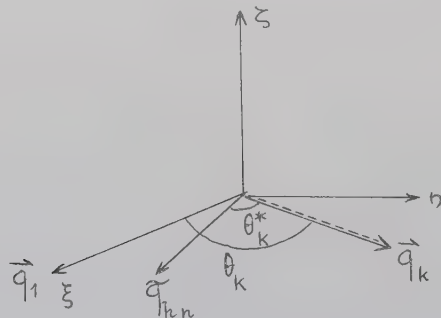
Pour les sous-systèmes pion-nucléon nous avons pris

$$\cos \theta_k^* = - \vec{q}_k \cdot \vec{q}_1^* / |q_1^*| |q_k| \qquad \cos \theta_k = - \vec{q}_k \cdot \vec{q}_1 / |q_1| |q_k|$$

et pour le dipion

$$\cos \theta_1^* = - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2^* / |q_1| |q_2^*| \qquad \cos \theta_1 = - 1$$

Il en résulte que les coordonnées angulaires de $\vec{q}_{h,n}$ sont : $\frac{\pi}{2}, \theta_k - \theta_k^*$.



La rotation de Wigner, d'angle Ω_k , s'introduit de la manière suivante : lorsqu'on procède au couplage ℓ -s on obtient des expressions plus simples en choisissant les tétrades des états à une particule, dont on veut réduire le produit, de la façon suivante :

$$[q_k] = [q_k \leftarrow P] [P]$$

où $[q_k \leftarrow P]$ est la transformation de Lorentz pure qui fait passer du vecteur unitaire P au vecteur unitaire q_k .

C'est ce que nous avons fait pour la tétrade $[q_1]$ du nucléon qui figure dans l'état $[q_1] \frac{1}{2} \mu_F > \otimes |q_2, 0> \otimes |q_3, 0>$.

Ensuite, lors du premier couplage du nucléon avec un pion, on choisira

$$[q_1]_k = [q_1 \leftarrow q'_k] [q'_k] \quad k = 2, 3$$

(q'_k est la quadri-impulsion d'un système nucléon-pion).

Enfin pour le second couplage entre le sous-système k et le pion restant on

prendra
$$[q'_k] = [q'_k \leftarrow P] [P]$$

Donc dans l'état final, au lieu d'avoir $[q_1]$ on a $[q_1]_k$

Le facteur

$$D_{\mu_F \mu'}^{1/2} \left([q_1]^{-1} [q_1 \leftarrow q'_k] [q'_k \leftarrow P] [P] \right) = e^{i \Omega_k \mu_F} \quad (\text{II-6})$$

apparaît pour tenir compte de ce changement de tétrade qui est une rotation

d'angle Ω_k autour de Oz (cf Appendice A).

Cette rotation est, en fin de compte, la seule différence pratique avec le formalisme non-relativiste de l'analyse en ondes partielles.

La formule (II-5) correspond au couplage initial entre le proton et un pion ; j_k est le spin du sous-système ainsi formé, par exemple un Δ de spin $3/2$. Si on couple d'abord les deux pions le facteur $e^{i \Omega \mu_F}$ disparaît et, dans le coefficient $\left\langle \begin{matrix} 1/2 & \ell_1 & j \\ \mu_F & m & m + \mu_F \end{matrix} \right\rangle$, ℓ_1 représente le spin du dipion ; enfin $\theta_1 = \pi$.

Dans le cas du ρ , $\ell_1 = 1$ et il apparaît, lors de la composition des spins du

proton et du ρ , deux représentations $j_1 = 1/2$ et $j_1 = 3/2$, auxquelles vont correspondre deux séries indépendantes d'amplitudes d'ondes partielles.

E - Décomposition sur les états d'isospin

Aux couplages en cascade des spins correspondent formellement des couplages d'isospins.

Si le premier couplage concerne le proton et un pion l'amplitude correspondante sera affectée du produit

$$H_{\Delta 3} = \left\langle \begin{array}{cc|c} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{array} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{15}} \text{ pour } \pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}$$

$$H_{\Delta 2} = \left\langle \begin{array}{cc|c} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right\rangle = \frac{-2}{\sqrt{15}} \text{ pour } \pi^0 p \rightarrow \Delta^+$$

$$H_{N^* 2} = \left\langle \begin{array}{cc|c} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ pour } \pi^0 p \rightarrow N^*$$

Si le premier couplage concerne les deux pions nous aurons :

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pour } \pi^+ \pi^0 \rightarrow \rho^+$$

Enfin si on désirait tenir compte d'une interaction pion-pion dans l'état d'isospin $I = 2$ on aurait encore

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} 2 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

F - Amplitudes de transition

En utilisant les bases d'états de moment angulaire qui ont été définies précédemment, l'amplitude de transition peut s'écrire :

$$T_{\mu_i \mu_f}(W, w_k^2, w_n^2, \Theta, \Phi) = \sum_{JJ_\zeta} \sum_{L L'_k} \sum_{j_k \ell_k} \langle [\tilde{P}] w_k^2 w_n^2 \mu_f | [\tilde{P}] J J_\zeta L'_k j_k \ell_k w_k^2 \mu_f \rangle$$

$$T_{L'_k j_k \ell_k}^{J L \mu_i \mu_f}(W, w_k^2) \langle [\tilde{P}] J J_\zeta L \mu_i | [\tilde{P}] \Theta \Phi \mu_i \rangle \quad (\text{II-7})$$

Dans cette expression le couplage choisi pour exprimer l'état final est indiqué par l'indice k ; il existe trois couplages en cascade distincts, correspondant aux trois paires de particules finales possibles, et chacun d'eux permet de construire une base complète d'états.

Or l'utilisation du modèle isobarique consiste à écrire un nombre réduit de termes impliquant l'un ou l'autre des trois couplages possibles π^+p , π^0p et $\pi^+\pi^0$. Par exemple, pour décrire la production du ρ on prendra évidemment le couplage par lequel on compose d'abord les spins du nucléon et du dipion puis la somme ainsi obtenue au moment angulaire orbital. Le ρ implique $\ell_1 = 1$ qui entraîne $j_1 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. D'autre part l'examen des résultats expérimentaux permet de choisir une limite pour J donc pour L et L'_1 . Du développement (II-7), avec $k=1$, ne subsistent alors qu'un petit nombre de termes.

Ainsi dans $|T_{\mu_i \mu_f}|^2$, c'est-à-dire dans l'expression de la section efficace différentielle, vont apparaître des expressions du type suivant :

$$\langle [\tilde{P}] w_k^2 w_n^2 \mu_f | [\tilde{P}] J J_\zeta L'_k j_k \ell_k w_k^2 \mu_f \rangle T_{L'_k j_k \ell_k}^{J L \mu_i \mu_f} \langle [\tilde{P}] J J_\zeta L \mu_i | [\tilde{P}] \Theta \Phi \mu_i \rangle$$

$$\langle [\tilde{P}] \Theta \Phi \mu_i | [\tilde{P}] J J_\zeta L \mu_i \rangle T_{L'_k j_k \ell_k}^{J L \mu_i \mu_f} \langle [\tilde{P}] J J_\zeta L'_k j_k \ell_k w_k^2 \mu_f | [\tilde{P}] w_k^2 w_n^2 \mu_f \rangle$$

dans lesquelles deux éléments de matrice réduite sont exprimés dans des bases différentes.

est un coefficient de recouplage (ou de Racah) qui relie deux couplages pour lesquels l'ordre des particules est différent. Ces coefficients ont été calculés par Moussa et par Mc Kerrel (7,8). Dans le cas de trois particules ils ne comportent pas d'intégration sur les variables w^2 (les seules pour l'état final) puisque, parmi les paramètres de dégénérescence, figurent des valeurs définies de w_k^2 et w_n^2 . Avec les axes $O\xi\eta\zeta$ ces coefficients ont l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \langle [\tilde{P}] J J_\xi L'_k j_k l_k w_k^2 \mu_F | [\tilde{P}] J J_\xi L'_n j_n l_n w_n^2 \mu_F \rangle &= \frac{1}{W} \left(\frac{w_k}{q_k q_k^*} \frac{w_n}{q_n q_n^*} \right)^{1/2} \frac{16\pi^2}{2J+1} \\ e^{i(\Omega_k + \Omega_n)\mu_F} \sum_{m_k, m_n} &\left\langle \begin{matrix} 1/2 & l_k \\ \mu_F & m_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_k \\ m_k + \mu_F \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 & l_n \\ \mu_F & m_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_n \\ m_n + \mu_F \end{matrix} \right\rangle \\ &\chi_{l_k}^{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \theta_k - \theta_k^* \right) \chi_{l_n}^{m_n} \left(\frac{\pi}{2}, \theta_n - \theta_n^* \right) \\ &\left\langle \begin{matrix} j_k & L'_k \\ m_k + \mu_F & M'_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_\xi \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j_n & L'_n \\ m_n + \mu_F & M'_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_\xi \end{matrix} \right\rangle \\ &\chi_{L'_k}^{M'_k} \left(\frac{\pi}{2}, \theta_k \right) \chi_{L'_n}^{M'_n} \left(\frac{\pi}{2}, \theta_n \right) \end{aligned} \quad (II-8)$$

Ils indiquent, en chaque point du diagramme de Dalitz, la possibilité d'interférence de deux ondes partielles résultant de deux couplages l -s différents.

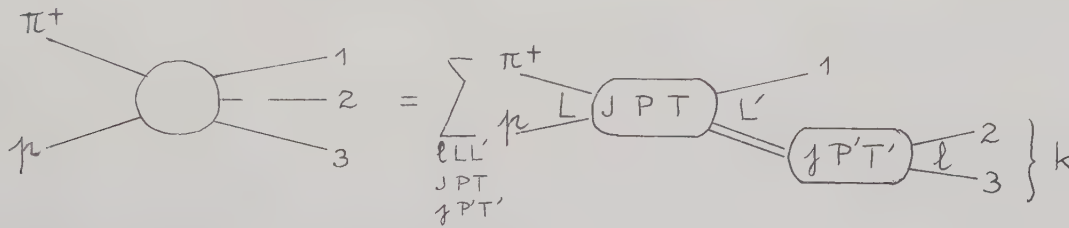
G - Expression de la section efficace différentielle

Avec les variables choisies l'élément de matrice (II-6) devient, en introduisant les coefficients de Clebsch-Gordan (II-4) et (II-5) :

$$\begin{aligned} \langle [\tilde{P}] w_k^2 w_n^2 \mu_F | T | [\tilde{P}] \Theta \Phi \mu_i \rangle &= \left(32 W^2 \cdot \frac{4W}{q_i} \right)^{1/2} \\ \sum_{JL L'_k} \sum_{j_k l_k} &T_{j_k l_k}^{JL \mu_i \mu_F}(W, w_k^2) e^{i\Omega_k \mu_F} \sum_{m_k} \left\langle \begin{matrix} 1/2 & l_k \\ \mu_F & m_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_k \\ m_k + \mu_F \end{matrix} \right\rangle P_{l_k}^m(0) \\ &\sum_{J_\xi} \left\langle \begin{matrix} j_k & L'_k \\ m_k + \mu_F & M'_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_\xi \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 & L \\ \mu_i & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_\xi \end{matrix} \right\rangle P_{L'_k}^{M'}(0) \exp i[(m+M)\theta_k - m\theta_k^*] \bar{Y}_L^M(\Theta, \Phi) \end{aligned} \quad (II-9)$$

On peut considérer le facteur $\exp. i [(m + M'_k) \theta_k - m \theta_k^*]$ comme une fonction des variables w_k^2, w_n^2 (par l'intermédiaire de $\cos \theta_k$ et $\cos \theta_k^*$ dont les expressions figurent dans l'appendice A) ; dans ce cas le facteur $(\frac{4W}{q} \cdot \frac{4w_k}{q_k})^{1/2}$ de l'expression (II-8), qui provient des jacobiens des passages aux variables angulaires, doit disparaître.

1 - L'amplitude de transition est ainsi décomposée en amplitudes d'ondes partielles $T_{L'_k j_k l_k}^{JL \mu_i \mu_F} (W, w_k^2)$ suivant le schéma :



P est la parité des états, T leur spin isotopique.

L'hypothèse du modèle isobarique consiste à factoriser, dans l'amplitude totale, une amplitude de désintégration du sous-système final $(jP'T')$ décrite par une formule de Breit et Wigner soit :

$$T_{L'_k l_k j_k}^{JL} (W, w_k^2) = A_{s\alpha} G_{\alpha} H_{sk} \frac{\sqrt{\Gamma_s}}{E_s - w_k - i \Gamma_s} \quad (\text{II-10})$$

$A_{s\alpha} G_{\alpha}$ est l'amplitude de production de la résonance s avec les nombres quantiques $J L'_k L j_k l_k$ de l'onde α

L'amplitude de désintégration de l'isobare s contient une largeur variable choisie empiriquement

$$\Gamma_s = \frac{(1+a) \tilde{\Gamma}_s q_k^{*2\ell+1}}{q_s^{*2\ell+1} + a q_k^{*2\ell+1}} \quad (\text{II-11})$$

q_s^* est la valeur de q_k^* à la résonance : $w_k = E_s$

$\tilde{\Gamma}_s$ est la largeur nominale.

Les valeurs du paramètre a et de $\tilde{\Gamma}_\Delta$, pour le ρ et le $\Delta(1236)$ ont été obtenues en ajustant la courbe $f(w_k) = \Gamma_\Delta^2 / [(E_\Delta - w_k)^2 - \Gamma_\Delta^2]$ aux valeurs de $\sin^2 \delta_1$ tirées de l'analyse en ondes partielles de la réaction élastique ⁽¹²⁾ pour le Δ et de l'étude de la diffusion pion-pion ⁽¹⁷⁾ pour le ρ .

Compte-tenu des facteurs cinématiques contenus dans la largeur variable Γ_Δ , le facteur G_α est choisi de manière à obtenir au seuil ($m_\pi + E_S$) un comportement de l'amplitude en $A q_k^{L'} q_k^{*\ell}$ où A ne présente plus de singularité cinématique. Cet argument de barrière centrifuge est justifié, pour le cas de l'analyse relativiste, dans la thèse de Moussa ⁽⁷⁾.

2 - Nous allons maintenant montrer comment, à partir des expressions précédentes, on peut écrire la section efficace différentielle sous la forme :

$$\frac{d^4\sigma}{dw_n^2 dw_k^2 d\cos\Theta d\phi} = \sum_{LM} \Gamma_{LM}(W, w_k^2, w_n^2) \operatorname{Re} Y_L^M(\Theta, \phi) + \Delta_{LM}(W, w_k^2, w_n^2) \operatorname{Im} Y_L^M(\Theta, \phi) \quad (\text{II-12})$$

posons

$$a_{k\alpha}^{Mm\mu_i\mu_F} = \left\langle \begin{matrix} 1/2 & l_k \\ \mu_F & m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_k \\ m+\mu_F \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j_k & L'_k \\ m+\mu_F & M' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_\zeta \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 & L \\ \mu_i & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ J_\zeta \end{matrix} \right\rangle P_{l_k}^m(0) P_{L'_k}^{M'}(0)$$

$$B_{\Delta k}^{M\alpha} = e^{iQ_k\mu_F} \sum_m a_{k\alpha}^{Mm\mu_i\mu_F} \exp i[(M+m)\theta_k - m\theta_k^*]$$

$$D_{\Delta\alpha k} = G_\alpha \frac{\sqrt{\Gamma_\Delta}}{E_\Delta - w_k - i\Gamma_\Delta}$$

Nous pouvons alors réécrire

(II-13)

$$T_{\mu_i\mu_F}(W, w_k^2, w_n^2, \Theta, \phi) = 32 W^2 \left(\frac{2}{q_1}\right)^{1/2} \sum_{\Delta\alpha k} A_{\Delta\alpha} D_{\Delta\alpha k} H_{\Delta k} \sum_M B_{\Delta k}^{M\alpha} \overline{Y}_L^M(\Theta, \phi)$$

H_{sk} sont les produits de coefficients de Clebsch-Gordan de la décomposition sur les états d'isospin.

La section efficace peut alors s'écrire :

$$\frac{d^4\sigma}{dw_k^2 dw_n^2 d\cos\Theta d\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{4q_i W} 2\pi \frac{1}{32W^2} \sum_{\mu_i \mu_f} |T_{\mu_i \mu_f}|^2 \quad (\text{II-14})$$

$\frac{1}{2}$ provient de la moyenne sur les spins initiaux.

$\frac{1}{32W^2}$ est le jacobien correspondant à $d\cos\Theta d\phi dw_k^2 dw_n^2$

$\frac{1}{4q_i W}$ est le facteur de flux incident,

2π est dû à l'intégration implicite sur l'angle γ . Aux facteurs de normalisation près nous avons :

$$\begin{aligned} |T_{\mu_i \mu_f}|^2 &= \left[\sum_{\alpha k} \bar{A}_{\alpha k} \bar{D}_{\alpha k} H_{\alpha k} \sum_M \bar{B}_{\alpha k}^{M\alpha} Y_{L\alpha}^{M\alpha}(\Theta, \Phi) \right] \left[\sum_{r\beta n} A_{r\beta} D_{r\beta n} H_{r\beta n} \sum_M B_{r\beta n}^{M\beta} \bar{Y}_{L\beta}^{M\beta}(\Theta, \Phi) \right] \\ &= \sum_{\alpha k} \sum_{r\beta n} (2 - \delta_{\alpha r} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kn}) H_{\alpha k} H_{r\beta n} \operatorname{Re} \left[\bar{A}_{\alpha k} A_{r\beta} \bar{D}_{\alpha k} D_{r\beta n} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \sum_{M_\alpha M_\beta} \bar{B}_{\alpha k}^{M_\alpha} B_{r\beta n}^{M_\beta} Y_{L\alpha}^{M_\alpha}(\Theta, \Phi) \bar{Y}_{L\beta}^{M_\beta}(\Theta, \Phi) \right] \end{aligned}$$

En regroupant différemment les termes et en composant les harmoniques sphériques au moyen de la formule

$$\begin{aligned} Y_{L\alpha}^{M_\alpha} \bar{Y}_{L\beta}^{M_\beta} &= (-1)^{M_\alpha} Y_{L\alpha}^{-M_\alpha} Y_{L\beta}^{M_\beta} = \sum_L \left\langle \begin{matrix} L_\alpha & L_\beta \\ -M_\alpha & M_\beta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} L \\ M \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} L_\alpha & L_\beta \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} L \\ 0 \end{matrix} \right\rangle (-1)^{M_\alpha} \left[\frac{(2L_\alpha+1)(2L_\beta+1)}{4\pi(2L+1)} \right]^{\frac{1}{2}} Y_L^M \\ &= \sum_L K_L^{M_\alpha M_\beta} Y_L^M(\Theta, \Phi) \end{aligned} \quad (\text{II, 15})$$

on arrive à

$$|T_{\mu_i \mu_f}|^2 = \sum_{LM} \left\{ \operatorname{Re} Y_L^M(\Theta, \Phi) \sum_{\alpha r} \sum_{\alpha\beta kn} (2 - \delta_{\alpha r} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kn}) H_{\alpha k} H_{r\beta n} \right. \quad (\text{II-16})$$

$$\left. \operatorname{Re} \left[\bar{A}_{\alpha k} A_{r\beta} \bar{D}_{\alpha k} D_{r\beta n} \sum_{M_\alpha M_\beta} K_L^{M_\alpha M_\beta} \bar{B}_{\alpha k}^{M_\alpha} B_{r\beta n}^{M_\beta} \right] + \text{expression imaginaire correspondante} \right\}$$

Les $B_{sk}^{M\alpha}$ sont des fonctions de w_k^2 et w_n^2 par l'intermédiaire de $\cos \theta_k$ et $\cos \theta_k^*$ (cf appendice A).

En regroupant les différents facteurs de normalisation et en prenant pour

$|T_{\mu_i \mu_F}|^2$ l'expression (II-16) on aboutit à

$$\frac{d^4 \sigma}{d \cos \Theta d\phi dw_k^2 dw_n^2} = \frac{\pi}{q_i^2} \sum_{\mu_i \mu_F} |T_{\mu_i \mu_F}|^2 \quad \text{qui a bien la forme de (II-12).}$$

Remarque :

On peut montrer que

$$\bar{Y}_L^{M\alpha}(\Theta, \phi) B_{sk}^{M\alpha}(-\mu_i, -\mu_F) = Y_L^{M\alpha}(\Theta, \phi) \bar{B}_{sk}^{M\alpha}(\mu_i, \mu_F) (-1)^{L+L'+\ell+1+\mu_F-\mu_i-2J}$$

or la conservation de la parité impose que $L + L' + \ell + 1$ soit pair ; comme $2J$ est impair on obtient

$$\bar{Y}_L^{M\alpha}(\Theta, \phi) B_{sk}^{M\alpha}(-\mu_i, -\mu_F) = (-1)^{\mu_i + \mu_F} \bar{B}_{sk}^{M\alpha}(\mu_i, \mu_F) Y_L^{M\alpha}(\Theta, \phi) \quad (\text{II-17})$$

Cette propriété, grâce à la sommation sur les indices μ_i et μ_F dans l'expression de la section efficace, provoque la disparition des termes

$$\text{Im} \left[\bar{B}_{sk}^{M\alpha} Y_{L_\alpha}^{M\alpha}(\Theta, \phi) \cdot B_{rn}^{M\beta} \bar{Y}_{L_\beta}^{M\beta}(\Theta, \phi) \right]$$

qui proviennent du développement de

$$\text{Re} \left[\bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta} \bar{D}_{s\alpha k} D_{r\beta n} \sum_{\mu_\alpha \mu_\beta} \bar{B}_{sk}^{M\alpha} B_{rn}^{M\beta} Y_{L_\alpha}^{M\alpha} \bar{Y}_{L_\beta}^{M\beta} \right]$$

H - Normalisation des amplitudes d'ondes partielles

Le modèle isobarique nous conduit à écrire les amplitudes d'ondes partielles sous la forme

$$T_{L' j_k \ell_k}^{JL}(W, w_k) = A_{s\alpha} G_\alpha H_{sk} \frac{\sqrt{\Gamma_s}}{E_s - w_k - i \Gamma_s} = A_{s\alpha} H_{sk} D_{s\alpha k}$$

Le terme de Breit-Wigner ne concerne que la désintégration du sous-système final d'indice k qui peut former la résonance s .

Même si la masse d'une des résonances, le ρ par exemple, ne se trouve pas dans les limites de l'espace de phase, on conserve cette formule pour exprimer la répartition en masse des sous-systèmes produits dans l'onde partielle α . C'est ainsi que, pour les trois valeurs les plus basses de l'énergie (1,678 ; 1,638 et 1,578), la répartition de la masse w_1 du dipion pour les ondes $\ell = 1$ est donnée par la queue de la Breit-Wigner du ρ .

Quant à l'intensité de la production du sous-système c'est l'amplitude $A_{s\alpha}$ qui doit en rendre compte.

La contribution du terme $D_{s\alpha k}$, lorsqu'on intègre sur tout l'espace de phase, doit donc être normalisée.

Il est possible de le faire en écrivant que chaque onde partielle vérifie la limite d'unitarité.

Si toutes les amplitudes A sont nulles, sauf $A_{s\alpha} = 1$ on obtient à partir de (II-16)

$$(J+1/2)\pi\chi^2 = \frac{\pi}{q_i^2} h_{s\alpha}^0 \iint_{\text{Dalitz}} |D_{s\alpha k}|^2 \sum_{M\mu_i\mu_F} |B_{sk}^{M\alpha}|^2 K_O^{M\alpha} M_{\alpha} dw_k^2 dw_n^2 \quad (\text{II-18})$$

On peut montrer que $\sum_{M\mu_i\mu_F} |B_{sk}^{M\alpha}|^2 K_O^{MM} = (J+1/2)$. Les coefficients H_{sk} relatifs à l'isospin disparaissent car, pour atteindre l'unitarité on somme sur les états de charge $p \pi^+ \pi^0$ et $n \pi^+ \pi^+$.

Nous définissons ainsi $h_{s\alpha}^0$ que nous appelons la norme de l'onde $s\alpha$. En se reportant aux formules II-14 et II-16 on trouve alors pour expression de la section efficace totale de la réaction $p \pi^+ \rightarrow p \pi^+ \pi^0$:

$$\frac{\sigma}{\pi\chi^2} = \sum_{\mu_\alpha\mu_F} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{kn} (J+1/2)(h_{s\alpha}^0 h_{s\beta}^0)^{1/2} (2 - \delta_{\alpha\beta} \delta_{kn}) H_{sk} H_{sn} \text{Re} [\overline{A}_{s\alpha} A_{s\beta}] \cdot \iint \overline{D}_{sk\alpha} D_{s\beta n} \sum_M \overline{B}_{sk}^{M\alpha} B_{sn}^{M\beta} K_O^{MM} dw_k^2 dw_n^2 \quad (\text{II-19})$$

La sommation sur $\alpha \beta$ correspond à des ondes de même J^P .

En séparant ces termes de même spin-parité on peut les comparer avec les sections efficaces inélastiques déduites de l'analyse de la réaction élastique $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ soit

$$\sigma_r(J^P) = \pi \lambda^2 (J+1/2)(1-\eta_{J^P}^2)$$

où η_{J^P} est le paramètre d'élasticité.

J - Propriétés dues à la conservation de la parité

Nous appliquons l'opérateur de parité aux états initial et final du système ; comme les axes $O\xi\eta\zeta$ sont liés à l'orientation des impulsions finales, ils se transforment aussi.

Pour l'état initial le vecteur d'état est multiplié par η_π parité du pion et $Y_L^M(\pi-\Theta, \phi) = (-1)^{L+M} Y_L^M(\Theta, \phi)$

Le système d'axes subit une rotation de π autour de $O\xi$ qui se traduit par un facteur $\exp. i\pi(\mu_f - \mu_i)$ que nous condensons avec la parité η_π

$$\eta_\pi \exp. i\pi(\mu_f - \mu_i) = \exp. i\pi(\mu_f + \mu_i)$$

En raison de l'invariance par parité ne subsistent alors, dans l'expression de l'amplitude sans retournement de spin, que les termes pour lesquels $L + M$ est impair et dans l'amplitude avec retournement ceux pour lesquels $L + M$ est pair.

Dans l'expression de la section efficace différentielle, compte tenu des coefficients de Clebsch-Gordan qui interviennent dans la composition des Y_L^M et qui imposent

$$M = M_\alpha + M_\beta \quad \text{et} \quad \text{Parité}(L) = \text{Parité}(L_\alpha + L_\beta),$$

on obtiendra le schéma suivant de répartition :

$$\left. \begin{array}{l} (L_\alpha + M_\alpha) \\ \mu_i = \mu_f \\ (L_\beta + M_\beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{impairs} \\ \text{pairs} \\ \text{impairs} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} L_\alpha \text{ pair et } L_\beta \text{ pair} \Rightarrow L \text{ pair, } M \text{ pair} \\ L_\alpha \text{ impair } L_\beta \text{ pair} \Rightarrow L \text{ impair, } M \text{ impair} \\ L_\alpha \text{ impair } L_\beta \text{ impair} \Rightarrow L \text{ pair, } M \text{ pair} \end{array} \right\} (L+M) \text{ pair}$$

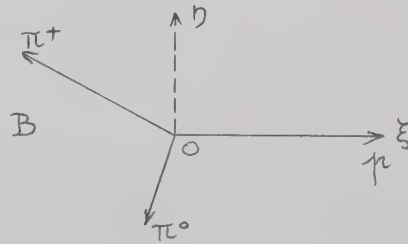
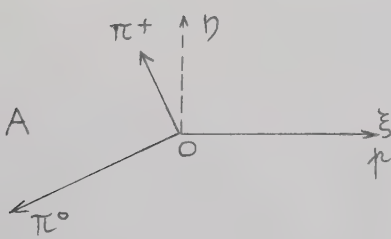
$$\mu_i = \mu_F \left. \begin{array}{l} (L_\alpha + M_\alpha) \quad L_\alpha \text{ pair et } L_\beta \text{ pair} \Rightarrow L \text{ pair } M \text{ pair} \\ \text{pairs } L_\alpha \text{ impair } L_\beta \text{ pair} \Rightarrow L \text{ impair } L \text{ impair} \\ (L_\beta + M_\beta) \quad L_\alpha \text{ impair } L_\beta \text{ impair} \Rightarrow L \text{ pair } M \text{ pair} \end{array} \right\} (L+M) \text{ pair}$$

Les termes d'ondes pures ou les interférences d'ondes de même parité feront intervenir des Y_L^M de la série L pair, M pair, tandis que les termes d'interférences d'ondes de parités opposées impliqueront des Y_L^M avec L impair M impair.

K - Cas où les masses des pions sont égales ou considérées comme telles

Ceci concerne évidemment les états finals tels que $n \pi^+ \pi^+$; cependant, les masses du π^+ et du π^0 étant voisines, il est utile de voir quelles simplifications peuvent être obtenues en admettant qu'elles sont égales.

Nous allons comparer les contributions au développement de la section efficace en deux points du diagramme de Dalitz symétriques par rapport à la bissectrice $w_3^2 = w_2^2$. Les configurations des impulsions y sont les suivantes



Le passage du point A au point B correspond à l'interversion $w_3^2 \rightleftharpoons w_2^2$ et se traduit par les changements suivants :

$$\left| \begin{array}{l} \theta_k^* \rightarrow -\theta_n^* \\ \theta_k \rightarrow -\theta_n \\ \Omega_k \rightarrow -\Omega_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} k=2, n=3 \\ k=3, n=2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \theta_1^* \rightarrow \pi - \theta_1^* \\ \theta_1 = \pi \\ \Omega_1 = 0 \end{array} \right.$$

qui affectent les facteurs exponentiels des termes $B_{sk}^{M\alpha}$

Remarquons d'abord que $P_\ell^m(0) = 0$ pour $\ell + m$ impair ce qui, pour $\ell = 1$, (cas du $\Delta(1236)$ et du ρ) annule les termes en $m = 0$.

Alors, pour les sous-systèmes nucléon-pion, on voit que le changement correspond à la conjugaison complexe du facteur $B_{sk}^{M\alpha}$ $k = 2, 3$ tandis que pour le ρ on a $\exp. i [(M-1) \pi - \theta_1^*] = (-1)^{M-1} \exp i \theta_1^*$ qui devient $(-1)^M \exp i \theta_1^*$ soit $B_{s1}^M \Rightarrow -\bar{B}_{s1}^M$

Mais nous avons vu que, grâce à la relation II-17 et à la sommation sur μ_i et μ_F ne subsistent respectivement dans l'expression des coefficients Γ_{LM} et Δ_{LM} que des facteurs Re et Im ($\bar{B}_{sk}^{M\alpha}$ $B_{rn}^{M\beta}$).

Ainsi pour les contributions des isobares purs, de leur interférence et du pur nous trouvons que l'échange $w_3^2 \rightleftharpoons w_2^2$ correspond à la conjugaison complexe pour l'expression

$$\sum_{\mu_i \mu_F \alpha \beta} (2 - \delta_{\alpha r} \delta_{\alpha \beta} \delta_{\alpha n}) \bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta} \bar{D}_{s\alpha k} D_{r\beta n} \sum_{M_\alpha M_\beta} K_L^{M_\alpha M_\beta} \bar{B}_{sk}^{M_\alpha} B_{rn}^{M_\beta} \quad (\text{II-20})$$

tandis que, pour les interférences des isobares avec le ρ , la conjugaison complexe est accompagnée d'un changement de signe.

Plus généralement pour les interférences des deux Δ avec un dipion de spin ℓ on aurait, en plus de la conjugaison complexe, un facteur $(-1)^\ell$. Ces propriétés permettent de simplifier les calculs pratiques lorsqu'on doit intégrer sur le diagramme de Dalitz.

L - Développement de la section efficace différentielle avec le système d'axes $O\xi'\eta'\zeta'$

Ce système est défini par :

$$O\zeta' = -\vec{q}_k = \vec{q}'_k \quad ; \quad O\eta' = \vec{q}_k \wedge \vec{q}_n$$

Puisque c'est maintenant $O\eta'$ qui est normal au plan des trois particules finales

la fonction $\mathcal{D}_{\mu_f \mu'}^{1/2}([q_1]^{-1}[q_1 \leftarrow q'_k][q'_k \leftarrow \vec{p}][\vec{p}])$

devient $d_{\mu_f \mu'}^{1/2}(\Omega_k)$ et le produit de coefficient de Clebsch-Gordan (II-4,

II-5) qui exprime la réduction du produit des représentations s'écrit :

$$\begin{aligned} & \langle [\vec{P}] \begin{smallmatrix} w_k^2 & w_n^2 \\ \mu_f & \mu' \end{smallmatrix} | [\vec{P}] \begin{smallmatrix} J & J_\zeta & L' & j_k & l_k & w_k \\ \mu_f & \mu' & \mu_i & \mu' & \mu' & \mu_f \end{smallmatrix} \rangle \langle [\vec{P}] \begin{smallmatrix} J & J_\zeta & L \\ \mu_i & \mu' & \mu_i \end{smallmatrix} | [\vec{P}] \tilde{\theta} \varphi \mu_i \rangle = \\ & \left(32 w^2 \frac{4w}{q_i} \right)^{1/2} \sum_{\mu'} d_{\mu_f \mu'}^{1/2}(\Omega_k) \sum_m \left\langle \begin{smallmatrix} 1/2 & l_k \\ \mu' & m \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} j \\ m+\mu' \end{smallmatrix} \right\rangle Y_{l_k}^m(\theta_k - \theta_k^*, 0) \quad (\text{II-22}) \end{aligned}$$

$$\sum_{M'} \left\langle \begin{smallmatrix} j_k & l'_k \\ m+\mu' & M' \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J \\ J_\zeta \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 1/2 & L \\ \mu_i & M \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J \\ J_\zeta \end{smallmatrix} \right\rangle Y_{l'_k}^{M'}(\theta_k, 0) \bar{Y}_L^M(\tilde{\theta}, \varphi)$$

pour le sous-système k dont l'impulsion coïncide avec l'axe $O\zeta'$

M'_k , projection du moment orbital final sur la ligne de vol du sous-système k et de la particule de recul, est nul.

$\cos \theta_k = 1$; $\varphi^* = 0$ car $O\xi'\zeta'$ est le plan de désintégration des sous-systèmes.

La conservation de la parité implique que les coefficients de $\text{Im } Y_L^M(\tilde{\theta}, \varphi)$ soient nuls.

Nous voyons que, si on veut étudier la production d'un sous-système sans avoir à tenir compte des interférences, le choix des axes $O\xi'\eta'\zeta'$ permet d'obtenir des expressions simples.

Prenons le cas du dipion $k = 1$, $O\zeta'$ est dirigé suivant l'impulsion du dipion, Ω_1 est nul. Nous poserons comme précédemment :

$$a_{k\alpha}^{M\mu_e\mu_f} = \left\langle \begin{matrix} 1/2 & l & j \\ \mu_f & m & m+\mu_f \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & L' & J \\ m+\mu_f & 0 & J_5 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 & L & J \\ \mu_e & M & J_5 \end{matrix} \right\rangle$$

$$B_{\alpha k}^M = a_{k\alpha}^{M\mu_e\mu_f} P_l^m(\cos \theta_k^*)$$

On peut alors écrire pour le dipion d'indice 1

$$\begin{aligned} \left| T_{\mu_e\mu_f} \right|^2 &= 32 W^2 \frac{4W}{9} \sum_{LM} \operatorname{Re} Y_L^M(\tilde{\theta}, \varphi) \sum_{\alpha\beta} (2 - \delta_{\alpha\beta}) H_{r1}^2 \operatorname{Re} \\ &\quad \operatorname{Re} \left[\bar{A}_{r\alpha} A_{r\beta} \bar{D}_{r\alpha 1} D_{r\beta 1} \sum_{M_\alpha M_\beta} \bar{B}_{r1}^{M_\alpha} B_{r1}^{M_\beta} K_L^{M_\alpha M_\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-23})$$

(II-15) montre que $M = -M_\alpha + M_\beta = -m_\alpha + m_\beta \leq 2$

Dans le produit $\bar{B}_{r1}^{M_\alpha} B_{r1}^{M_\beta}$ on peut composer les $P_l^{m_\alpha}(\cos \theta_1^*) P_l^{m_\beta}(\cos \theta_1^*)$ en une somme de $P_l^m(\cos \theta_1^*)$

Alors, dans le cas du ρ ($l=1$), la section efficace de production du dipion peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^4\sigma}{dw_k^2 dw_n^2 d\cos\tilde{\theta} d\varphi} &= Q_0 + \sum_L Q_{L,0}^\circ Y_L^\circ(\tilde{\theta}, \varphi) + Q_{L,2}^\circ P_2(\cos \theta_1^*) Y_L^\circ(\tilde{\theta}, \varphi) + \\ &Q_{L,2}^1 P_2^1(\cos \theta_1^*) \operatorname{Re} Y_L^1(\tilde{\theta}, \varphi) + Q_{L,2}^2 P_2^2(\cos \theta_1^*) \operatorname{Re} Y_L^2(\tilde{\theta}, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

Ce développement sera utilisé pour l'analyse des résultats expérimentaux par la méthode des moments.

III - ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

+++++

L'analyse en ondes partielles de la réaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^0$ nous a permis d'écrire la section efficace différentielle sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques de la direction incidente, développement dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées du diagramme de Dalitz ; l'expression de ces fonctions dépend des hypothèses introduites par le modèle isobarique.

Dans ce chapitre nous emploierons les axes $O\xi'\eta'\zeta'$ qui font intervenir l'angle de production $\tilde{\theta}$ et l'angle des plans de production et de désintégration du sous-système dont l'impulsion est dirigée suivant $O\zeta'$. Le développement correspondant est donné par la formule (II-24). La distribution angulaire des événements d'une expérience peut s'écrire :

$$I(\tilde{\theta}, \varphi) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\cos \theta_i - \cos \theta) \delta(\varphi_i - \varphi)$$

Les coefficients du développement en harmoniques sphériques pour une zone d'indice z contenant N_z événements seront :

$$\Gamma_{LMz} = \frac{\sigma}{\pi \chi^2} N_z \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} I(\tilde{\theta}, \varphi) \operatorname{Re} Y_L^M(\tilde{\theta}, \varphi) d\cos \tilde{\theta} d\varphi = \frac{\sigma}{\pi \chi^2} \frac{N_z}{N} \sum_i \operatorname{Re} Y_L^M(\theta_i, \varphi_i)$$

$$\Delta_{LMz} = \frac{\sigma}{\pi \chi^2} N_z \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} I(\tilde{\theta}, \varphi) \operatorname{Im} Y_L^M(\tilde{\theta}, \varphi) d\cos \tilde{\theta} d\varphi = \frac{\sigma}{\pi \chi^2} \frac{N_z}{N} \sum_i \operatorname{Im} Y_L^M(\theta_i, \varphi_i)$$

L'ensemble de ces quantités constitue une représentation des résultats expérimentaux que nous allons utiliser pour mettre en évidence certains effets, ou en retrouver de bien connus tels que la production du ρ dans des collisions périphériques.

Les quantités $\sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{\pi \chi^2} \frac{N_z}{N} \langle \text{Re } Y_L^M(\tilde{\theta}, \varphi) \rangle$ ont été calculées pour $L \leq 6$, $M \leq 6$; l'indice z désigne les zones délimitées dans le diagramme de Dalitz. Dans le cas du ρ les axes sont

$$O\zeta' = -\vec{q}_1 \quad O\eta' = \vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2$$

On distingue d'abord deux moitiés dans le diagramme de Dalitz

$$\begin{array}{ll} w_2^2 < w_3^2 & \Delta^+ \\ & \text{dans laquelle prédomine la formation du} \\ w_2^2 > w_3^2 & \Delta^{++} \end{array}$$

Puis on divise l'intervalle de variation de la masse carrée du dipion w_1^2 en dix parties égales, ceci pour l'énergie la plus élevée $W = 1,97$ GeV; les valeurs limites correspondantes de w_1^2 sont conservées pour les quatre énergies suivantes de manière à faciliter les comparaisons; le nombre d'intervalles utiles n est plus que de six à 1,73 GeV.

Aux trois énergies inférieures restantes les effets dûs à la production du ρ achèvent de disparaître, c'est pourquoi nous n'avons pas présenté les résultats correspondants.

Pour mettre en évidence les effets dûs à la production du $\Delta(1236)$ les axes sont définis par $O\zeta' = -\vec{q}_3$ $O\eta' = \vec{q}_3 \wedge \vec{q}_1$ et on prend encore dix intervalles de variation de w_3^2 , mais sans distinguer cette fois les deux moitiés du diagramme de Dalitz.

Seules les quantités correspondant à $M \leq 2$ sont reportées sur les figures (1 & 2). Nous avons vu (II,L) que ces coefficients contiennent tous les effets dûs à la production du seul isobare dont l'impulsion coïncide avec l'axe $O\zeta'$. Les effets des deux autres isobares et de toutes les interférences concernent par contre tous les coefficients jusqu'à $M = 6$.

D'autre part la section efficace différentielle $d\sigma/d \cos \tilde{\theta} (w_1^2, \cos \tilde{\theta})$ ne dépend que des coefficients pour lesquels $M = 0$.

A - Effets liés à la production du dipion

$O\xi'$ est dirigé suivant l'impulsion du dipion ;

$O\xi'\zeta'$ est le plan de désintégration du dipion ;

l'impulsion du π^0 est dans le demi-plan $\xi' \geq 0$.

$\tilde{\theta}$ est l'angle de production du dipion ou

encore l'angle entre les directions initiale et finale du nucléon.

φ est l'angle entre les plans de désintégration et de production du dipion, il est invariant par une transformation de Lorentz pure le long de $O\xi'$ faisant passer dans le centre de masse du dipion.

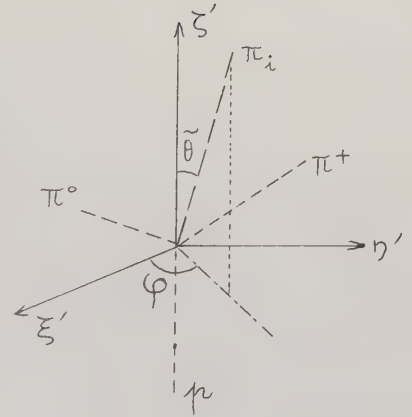
Les angles φ et ϕ sont reliés par la formule

$$\cos \varphi = \sin \phi \sin \Theta (1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \phi)^{-1/2}$$

Par conséquent $\cos \varphi$ a le signe de $\sin \phi$; comme on a défini $O\zeta = q_1 \wedge q_2$

$\sin \phi$ est positif lorsque l'impulsion du pion incident se projette sur le demi plan $\eta' > 0$ qui contient $\vec{q}_2$. On remarque, pour $M = 1$, un changement de signe (fig. 1 b) entre les points relatifs à chacune des moitiés du diagramme de Dalitz ; pour $w_3^2 > w_2^2$, ou $|q_3| < |q_2|$, $\cos \varphi$, donc $\sin \phi$, sont positifs, c'est-à-dire que les impulsions du pion incident et du pion le plus énergétique sont du même côté du plan $O\xi'\zeta'$. On note ensuite l'importance de l'effet en

$\text{Re } Y_2^1 \sim -\sin 2\tilde{\theta} \cos \varphi$. La présence du facteur $\cos \varphi$ implique que les plans de production et de désintégration soient voisins (pour $\tilde{\theta}$ proche de $\frac{\pi}{4}$) : à $\tilde{\theta}$ constant cela correspond à un transfert d'impulsion minimum du pion incident au pion final le plus rapide ou encore à une disposition, pour toutes les impulsions, initiales et finales, qui approche la coplanarité.



De plus cet effet en $\text{Re } Y_2^1$ est maximal aux deux énergies 1,78 et 1,81 GeV

pour lesquelles le ρ est produit dans la région du diagramme de Dalitz correspondant aux grandes masses de dipion. Corrélativement, pour $\text{Re } Y_2^2 \sim \sin^2 \tilde{\theta} \cos 2\varphi$, la valeur moyenne, au voisinage de la masse carrée du ρ , change de signe entre 1,81 et 1,90 Gev ; c'est évidemment un effet en φ lié lui aussi au fait que la production du ρ pour 1,90 Gev commence à peupler la région des faibles masses du dipion.

(Si on choisit la direction du proton pour définir $\cos \theta_k^*$ dans la désintégration d'un sous-système $\pi\pi$, $\cos \theta_{k1}^* = - \vec{q}_k \cdot \vec{q}_{k1}^* / |q_k| |q_{k1}^*|$, la région des faibles masses de dipion correspond à la condition $\cos \theta_{k1}^* > 0$).

Dans cette région des faibles masses de dipion les impulsions des deux pions sont voisines, leur impulsion relative est faible, le transfert d'impulsion du pion incident au nucléon devient important et l'argument selon lequel les impulsions du pion le plus rapide et du pion incident sont voisines, ne joue plus. Par conséquent l'angle φ cesse d'être voisin de 0 ce qui correspond à la variation observée du facteur $\cos 2\varphi$

Les effets en φ ne se limitent pas à $L = 2$: pour $L = 6$ les valeurs moyennes sont négligeables pour $M = 0$ puis croissantes pour $M = 1, 2$. Plus généralement bien que ce soit moins net, on peut noter que, lorsque L croît, les variations des coefficients sont d'autant plus marquées que M est plus grand.

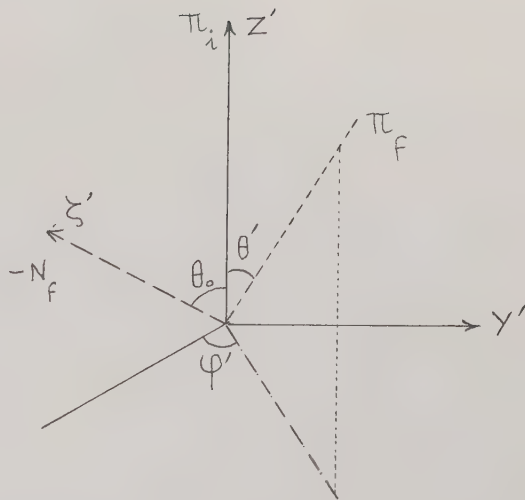
L'analyse sommaire qui vient d'être faite à partir des valeurs moyennes des $Y_L^M(\tilde{\theta}, \varphi)$ est en accord avec le mécanisme bien connu des collisions périphériques que montrent clairement les diagrammes de Chew et Low : la production du ρ est liée à de faibles transferts d'impulsion du pion incident au nucléon⁽⁹⁾.

Si on adopte le modèle d'échange d'un pion pour décrire la réaction, la distribution angulaire de désintégration du dipion s'exprime ainsi :

$$W(\theta', \varphi') = \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta' \quad (\text{III-1})$$

dans le système d'axes lié au ρ et dont l'axe $O Z'$ coïncide avec la direction des π incidents.

La transformation qui fait passer de $O X'Y'Z'$ à $O \xi' \eta' \zeta'$ peut être décomposée en une rotation d'angle θ_0 autour de la normale au plan de production du nucléon final suivie d'une transformation de Lorentz pure, suivant $O \zeta'$, pour passer dans le centre de masse général.



$$\text{On a } \cos \theta' = \sin \theta_1^* \cos \varphi \sin \theta_0 - \cos \theta_1^* \cos \theta_0$$

et la transformation de Lorentz donne

$$\tan \theta_0 = \frac{\sin \tilde{\theta}}{\bar{\gamma}_\rho (\cos \tilde{\theta} + \beta_\rho / \beta_1)} = \sin \tilde{\theta} R(\cos \tilde{\theta})$$

$\bar{\gamma}_\rho$, $\bar{\beta}_\rho$, $\bar{\beta}_1$ sont mesurés dans le centre de masse, l'indice ρ désigne le dipion, i le pion incident ; la distribution angulaire (III-1) devient :

$$W(\theta^*, \varphi, \tilde{\theta}) = \frac{3 \cos^2 \theta_0}{4\pi} \left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{8}{45}} P_2(\cos \theta_1^*) - \frac{4}{\sqrt{15}} R(\cos \tilde{\theta}) \sin P_2^1(\cos \theta_1^*) \right)$$

$$\cos \varphi - \frac{2}{\sqrt{15}} R^2(\cos \tilde{\theta}) \sin^2 \tilde{\theta} P_2^2(\cos \theta_1^*) (1 - \cos 2\varphi) \quad (\text{III-2})$$

Comparons cette distribution, au voisinage de $\tilde{\theta} = 0$, le ρ étant donc produit vers l'avant, avec une distribution angulaire du type (II-24) : en égalant le rapport des termes en $P_2^0(\cos \theta_1^*)$ et en $P_2^1(\cos \theta_1^*)$ on obtient la relation suivante :

$$\frac{\sum_L Q_{L2}^0 P_L(1)}{\sum_L Q_{L2}^1 P_L^1(1)} = \frac{1}{\sqrt{6} R(1)} = \frac{1}{6 (\bar{\gamma}_\rho + \eta_\rho / \beta_1)}$$

Tableau III - a

W	$m_{\pi\pi}$	$\sqrt{6} R(1)$	$\sqrt{6} R(1) \sum_L Q_{L2}^0 P_L(1)$	$\sum_L Q_{L2}^1 \left \frac{P_L^1(\cos\tilde{\theta})}{\sin\tilde{\theta}} \right _{\tilde{\theta}=0}$
1,734	0,725	3,42	6,3 $\pm$ 0,8	7,5 $\pm$ 0,7
			4,4 $\pm$ 0,8	3,5 $\pm$ 0,6
1,777	0,725	3,78	14,2 $\pm$ 2,3	16,3 $\pm$ 2,3
			9,8 $\pm$ 2,0	13,7 $\pm$ 1,8
	0,797	3,14	2,7 $\pm$ 1,2	7,8 $\pm$ 1,8
			0,9 $\pm$ 1,2	8,1 $\pm$ 1,5
1,812	0,725	4,0	27,2 $\pm$ 2,5	23,8 $\pm$ 2,3
			13,2 $\pm$ 2,2	16,7 $\pm$ 2
	0,797	3,4	8,2 $\pm$ 1,7	10,3 $\pm$ 2
			4,8 $\pm$ 1,5	14,4 $\pm$ 2
1,898	0,725	4,52	11,4 $\pm$ 3,5	17,0 $\pm$ 2,7
			28,5 $\pm$ 3,5	25, $\pm$ 2,5
	0,797	3,95	20,3 $\pm$ 3	21 $\pm$ 2,7
			15,0 $\pm$ 2,5	24 $\pm$ 2,3
1,941	0,725	4,93	26,1 $\pm$ 3,5	28 $\pm$ 2,5
			33,5 $\pm$ 3,5	26,4 $\pm$ 2,2
	0,797	4,36	17,5 $\pm$ 2,2	9,8 $\pm$ 1,8
			-0,5 $\pm$ 1,3	7,4 $\pm$ 1,4

Nous avons rassemblé dans le tableau (III - a) les valeurs de

$$\sqrt{6} R(1) \sum_L Q_{L2}^0 P_L(1) \quad \text{et de} \quad \sum_L Q_{L2}^1 \left| P_L^1(\cos \tilde{\theta}) / \sin \tilde{\theta} \right|_{\tilde{\theta}=0}$$

qui doivent être comparables dans la mesure où le modèle d'échange est vérifié.

Les calculs sont faits pour deux valeurs de la masse du dipion encadrant la masse du ρ et pour les deux moitiés du diagramme de Dalitz.

En raison de quelques résultats incompatibles on voit que le test n'est pas totalement satisfaisant. Nous reprenons, d'une autre manière, au chapitre IV, la question du modèle d'échange d'un pion.

B - Effets liés à la production du $\Delta(1236)$.

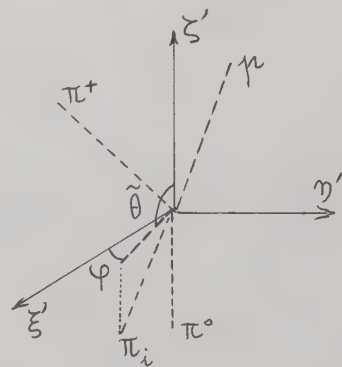
Considérons le cas où $0 \zeta'$ est dirigé suivant l'impulsion du sous-système $p \pi^+$ dont le plan de désintégration est $0 \xi' \zeta'$

L'impulsion du π^+ est dans le

demi plan $\eta' = 0$; $\xi' > 0$.

$\tilde{\theta}$ est l'angle de production du Δ^{++} .

φ est l'angle des plans de production et de désintégration du Δ^{++} .



Lorsque w_3^2 passe par la valeur de la masse carrée du $\Delta(1236)$, soit $1,53 \text{ GeV}^2$, on observe, (fig. 2 a,b,c), particulièrement pour $M = 1$, des effets importants.

Comparons les valeurs des coefficients suivants :

$$\langle \text{Re } Y_1^1 \rangle \sim \langle -\sin \tilde{\theta} \cos \varphi \rangle$$

$$\langle \text{Re } Y_1^0 \rangle \sim \langle \cos \tilde{\theta} \rangle$$

$$\langle \text{Re } Y_3^1 \rangle \sim \langle (1 - 5 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \cos \varphi \rangle$$

Puisque $\sin \tilde{\theta}$ est positif, les valeurs négatives de $\langle \text{Re } Y_1^1 \rangle$ indiquent que $\cos \varphi$ est positif en moyenne, c'est-à-dire que l'impulsion du pion incident est proche

du demi-plan $\eta' = 0$; $\xi' > 0$ qui contient l'impulsion du π^+ de désintégration.

Les valeurs négatives de $\text{Re} \langle Y_1^0 \rangle$ (fig. 2 a) montrent que $\pi/2 < \tilde{\theta} < \pi$; par conséquent l'impulsion du pion incident est du même côté que celle du π^0 spectateur par rapport au plan $O\xi\eta$ ou encore elle est approximativement opposée à celle du nucléon final.

Enfin les valeurs de $\langle \text{Re} Y_3^1 \rangle$ montrent que $\sin \tilde{\theta}$ n'est pas faible en moyenne ce qui s'accorde avec le fait que la production du Δ n'atteint pas son maximum strictement vers l'arrière, mais autour de $\cos \tilde{\theta} = -0,8$ (fig.4).

C - Section efficace différentielle

A partir des coefficients du développement (II-24) de la section efficace différentielle calculés pour les deux systèmes d'axes $O\xi'\eta'\zeta'$ il est possible d'obtenir les valeurs de cette section efficace en fonction de $\cos \tilde{\theta}$ (fig. 2 a, b).

Pour le Δ on constate qu'il est produit principalement vers l'arrière et dans une faible mesure vers l'avant et dans les deux cas le maximum correspond à $|\cos \tilde{\theta}| = 0,8$.

Au contraire le ρ est produit uniquement vers l'avant avec le maximum pour $\cos \tilde{\theta} = 1$.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au point suivant: comparons les valeurs obtenues, dans chacune des moitiés du diagramme de Dalitz, pour la section efficace différentielle vers l'avant de production du dipion (fig. 3). Si les effets d'interférence sont relativement faibles, étant données les valeurs des coefficients de Clebsch-Gordan d'isospin, on s'attend à ce que les valeurs obtenues dans la zone correspondant au Δ^{++} soient plus élevées. C'est bien ce que l'on observe, cependant les valeurs trouvées sont souvent

très proches, particulièrement au voisinage de la masse du ρ pour laquelle, à 1,90 GeV, elles s'inversent même.

Dans l'élaboration des résultats expérimentaux nous n'avons pas trouvé de raison de penser que cette inversion est due à un biais.

Nous allons examiner, a priori, si le modèle permet de rendre compte d'une telle inversion et si les solutions $A_{s\alpha}$ trouvées (cf IV) permettent alors de la reconstituer.

La section efficace différentielle de production du ρ vers l'avant est donnée par le développement (II-12) pour $\Theta = \frac{\pi}{2}$ et $\Phi = \pi$ ce qui correspond à $\text{Im } Y_L^M = 0$; il ne reste que les $\text{Re } Y_L^M$ pour lesquels on a déjà la condition $L + M$ pair.

Nous avons trouvé (cf II-K ,II-20) que, en deux points symétriques dans le diagramme de Dalitz, les contributions aux coefficients Γ_{LM} qui proviennent des termes d'isobares purs, du ρ pur ou de l'interférence des deux isobares sont égales alors que les contributions des interférences $\rho - \Delta$ sont opposées.

A l'énergie considérée : 1,90 GeV, les deux Δ n'interfèrent pratiquement pas ; quant aux contributions du Δ^{++} dans la zone du Δ^+ et vice versa nous les négligerons.

Incluons maintenant les facteurs d'isospin H_{sk} : de la zone du Δ^{++} à celle du Δ^+ le produit des facteurs H , pour les termes que nous conservons, passe de 9/15 à 4/15 pour le Δ pur et de $3/\sqrt{30}$ à $-2/\sqrt{30}$ pour l'interférence $\rho - \Delta$. En symbolisant les parties réelles des expressions (II-20) par $\Delta\Delta$ et $\Delta\rho$, compte-tenu du changement de signe pour $\Delta\rho$ (cf. II-K), l'effet trouvé correspond à l'inégalité :

$$(9/15) \Delta\Delta + \rho\rho + (3/\sqrt{30})\Delta\rho < (4/15)\Delta\Delta + \rho\rho + (2/\sqrt{30})\Delta\rho$$

Les termes $\Delta\Delta$ et $\rho\rho$ étant positifs il faut que $\Delta\rho$, calculé dans la région du Δ^{++} , soit négatif et vérifie

$$|\Delta\rho| > (\sqrt{30}/3) \Delta\Delta$$

De plus la section efficace différentielle de production du ρ vers l'avant devant nécessairement être positive il faut encore avoir

$$\rho\rho > (2/5) \Delta\Delta$$

L'effet étudié correspond aux événements dont les points représentatifs, dans le diagramme de Chew et Low, se situent dans la région de densité maximale où la masse du dipion avoisine celle du ρ tandis que le transfert d'impulsion au nucléon est minimal ; on se trouve donc dans des conditions favorables pour que les inégalités précédentes, qui impliquent un effet d'interférence du Δ et du ρ au moins deux fois supérieur à la contribution du Δ pur, soient vérifiées par les expressions calculées d'après le modèle isobarique.

A partir d'une solution obtenue par la méthode d'ajustement qui fait l'objet du chapitre suivant, nous avons calculé la section efficace différentielle (III-3). Les courbes ainsi obtenues et les points expérimentaux sont portés sur la figure 5 en fonction de $\cos \tilde{\theta}$. On voit que, vers l'avant, la solution, c'est-à-dire l'ensemble des amplitudes $A_{\lambda\alpha}$ introduites dans le calcul, ne permet pas de rendre compte de la variation expérimentale.

A l'énergie considérée, 1,90 GeV, les résonances dominantes dans le canal d'isospin $3/2$ sont $\Delta(1910)$ F35 et $\Delta(1950)$ F37.

Comme nous n'avons pas introduit les ondes F de production du dans les calculs nous ne pouvons pas connaître la part de la voie p, ρ^+ dans la désintégration des deux résonances F35 et F37. A quoi pourrait-on s'attendre si l'on ajoutait ces ondes F ?

Pour les termes qui concernent le ρ pur, en se reportant à la figure 12 b on voit que le spectre de masse du dipion et la distribution du cosinus de l'angle de diffusion du nucléon, donc la distribution angulaire du dipion, sont correctement reproduits ; par conséquent on obtiendra, en ajoutant des ondes F une nouvelle répartition entre les ondes, mais pas de changement notable du terme donnant globalement la production du ρ , la qualité de l'ajustement ne changeant pas.

Pour les interférences $\Delta\rho$ par contre, il n'est pas exclu que les termes supplémentaires obtenus permettent de reproduire correctement le résultat expérimental. Enfin à 1,97 GeV les résultats relatifs aux deux moitiés du diagramme de Dalitz ne s'inversent plus mais restent très voisins : ceci pourrait s'expliquer en admettant que la résonance F37 dont l'influence devient dominante à 1,97 GeV est plus fortement couplée au canal $\pi\Delta$ que la résonance F35.

IV - DETERMINATION DES AMPLITUDES D'ONDES PARTIELLES

+++++

A - Choix des ondes partielles et des isobares

A chaque énergie, pour les événements dont nous disposons, les diagrammes de Dalitz, dont les variables sont les masses carrées des sous-systèmes $p-\pi$ (fig.6) nous montrent qu'il faut retenir, comme résonances intermédiaires, le $\Delta(1236)3/2^+$ dans ses deux états de charge et le ρ (pour lequel nous avons deux séries d'amplitudes indépendantes correspondant aux deux représentations $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ de la somme j_1 des spins du nucléon et du dipion)*

Tandis que la région commune aux deux états de charges du Δ est progressivement rejetée hors des limites du domaine, la région du ρ y pénètre en recoupant les deux zones du Δ . Donc, à l'énergie la plus basse, le ρ ne se manifeste que par la queue de la Breit-Wigner et les deux Δ interfèrent largement, tandis qu'aux énergies les plus élevées, 1,90 et 1,97 GeV, l'interférence du ρ et des Δ est devenue prépondérante.

Si nous nous reportons maintenant aux résultats de l'analyse de la diffusion élastique (fig.7), nous voyons que les ondes de moment orbital initial supérieur à 3 peuvent être négligées dans la zone d'énergie que nous étudions. Par ailleurs l'analyse des résultats expérimentaux⁽¹⁰⁾ a montré que les moments $\langle Y_L^M(\Theta\Phi) \rangle$ sont négligeables pour $L = 7$ ce qui conduit à prendre $L' \leq 3$ pour le moment orbital final.

(*) Nous verrons, à propos de la réaction $p \pi^+ \rightarrow n \pi^+ \pi^+$, qu'il faudrait envisager également le $N^*(1520) D13$ et le $N^*(1680) D15$ ainsi qu'une interaction dipionique d'isospin 2.

La liste des ondes, notées (L,L',2J), possibles compte tenu de la conservation de la parité, s'établit alors ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \\ \varrho \quad j_1 = 3/2 \end{array} \right\} \begin{array}{ccccccccc} \text{FP1} & \text{SD1} & \text{DS3} & \text{PF3} & \text{DD3} & \text{PF5} & & \text{FP5} & \text{DD5} & \text{FF5} & \text{FF7} \end{array}$$

$$\varrho \quad j_1 = 1/2 \quad \begin{array}{ccccccc} \text{SS1} & \text{PP1} & & \text{PP3} & \text{DD3} & & \text{DD5} & \text{FF5} & \text{FF7} \end{array}$$

soit 27 amplitudes correspondant à 54 paramètres réels.

Dans cette étude nous n'avons introduit, pour la production du ϱ , que les 4 ondes les plus basses de chacune des deux séries $j_1=3/2$ et $j_1=1/2$. En effet l'analyse de la diffusion élastique montre que l'amplitude de l'onde D35 est petite ; si on introduisait les deux ondes DD5 de production du ϱ on aurait quatre paramètres supplémentaires qui ne pourraient sans doute atteindre que des valeurs relativement faibles. On a écarté l'onde PF3 du ϱ car l'étude⁽¹⁶⁾ avec la production du Δ seul a montré que l'onde PF3 du ϱ était faible. Enfin l'onde DD3 du ϱ , $j_1=3/2$, n'a pas été utilisée non plus.

Après l'étape que marquent ces limitations, les ondes F de production du ϱ devront être utilisées, pour rendre compte des effets observés dans la variation des coefficients pour $L = 6$ (fig.1 a,b,c) et pour analyser les voies de désintégration des résonances $\Delta(1910)$ F35 et surtout $\Delta(1950)$ F37, en raison de son classement dans le décuplet $7/2^+$.

Cette étape s'impose pour des raisons pratiques dues à l'emploi d'une calculatrice, tant pour la mise au point des programmes, que pour la durée des calculs. Elle se justifie aussi par la difficulté qu'il y aurait à introduire d'emblée une cinquantaine de paramètres d'autant que l'on peut espérer le faire plus valablement lorsqu'on disposera d'un plus grand nombre d'événements (nous verrons que la détermination des 17 phases d'amplitudes est déjà très imprécise). Cependant le nombre de combinaisons d'ondes représentées par le couple d'indices $\alpha\beta$, passera alors de 80 à 170 pour les interférences du Δ et du ϱ et de 16 à 70 pour les interférences entre le ϱ , $j_1=3/2$ et le ϱ , $j_1=1/2$.

B - Détermination des amplitudes d'ondes partielles

1°/ Calculs préalables

Nous cherchons à déterminer, par des ajustements aux résultats expérimentaux, les coefficients complexes $A_{\alpha}(W)$

Ces ajustements sont faits de manière indépendante pour chaque valeur de l'énergie totale W .

L'intervalle de variation de la masse carrée du dipion

$$(W - m_p)^2 ; (m_{\pi^+} + m_{\pi^0})^2$$

est divisé en six parties égales définissant six zones dans le diagramme de Dalitz. Autrement dit on se propose d'analyser en six points le spectre de masse du dipion et la dépendance en $\cos^2 \theta_k^*$ ($k = 2, 3$) de la section efficace différentielle (cette dépendance en $\cos^2 \theta_k^*$ provient de la valeur $l = 1$ du moment orbital de l'isobare).

A partir des événements de chacune de ces zones on calcule les valeurs des coefficients du développement de la section efficace différentielle par la méthode des moments.

Soient Γ_{LMz} et Δ_{LMz} les valeurs obtenues, z étant l'indice de la zone ; pour obtenir les expressions théoriques correspondantes nous pouvons exprimer, à partir de la formule (II-16), les coefficients Γ_{LM} et Δ_{LM}

$$\Gamma_{LM} = \sum_{sr} \sum_{\alpha\beta} \sum_{kn} (2 - \delta_{\alpha\beta} \delta_{sr} \delta_{kn}) H_{sk} H_{rn} \operatorname{Re}(\bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta}) \operatorname{Re}(\bar{D}_{s\alpha k} D_{r\beta n}) \sum_{M_\alpha M_\beta} \sum_{\mu_i \mu_f} K_L^{M_\alpha M_\beta} \bar{B}_{sk}^{M_\alpha} B_{rn}^{M_\beta} \quad (IV-1)$$

et une expression similaire pour Δ_{LM} .

Nous poserons :

$$h_{sr\alpha\beta z}^{LM} = \sum_{kn} (2 - \delta_{rs} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kn}) H_{sk} H_{rn} \iint_z \bar{D}_{s\alpha k} D_{r\beta n} \sum_{M_\alpha M_\beta} \sum_{\mu_i \mu_f} K_L^{M_\alpha M_\beta} \bar{B}_{sk}^{M_\alpha} B_{rn}^{M_\beta} dw_k^2 dw_n^2 \quad (IV-2)$$

Pour procéder aux ajustements il faut préalablement calculer ces coefficients h qui sont les facteurs de Re et Im($\bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta}$) dans l'expression des Γ_{LM} et Δ_{LM} dont les valeurs moyennes, pour chaque zone z , seront :

$$\Gamma_{LMz} = \sum_{sr} \sum_{\alpha\beta} \text{Re}(\bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta}) \text{Re } h_{sr\alpha\beta z}^{LM} - \text{Im}(\bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta}) \text{Im } h_{sr\alpha\beta z}^{LM}$$

$$\Delta_{LMz} = \sum_{sr} \sum_{\alpha\beta} \text{Re}(\bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta}) \text{Im } h_{sr\alpha\beta z}^{LM} + \text{Im}(\bar{A}_{s\alpha} A_{r\beta}) \text{Re } h_{sr\alpha\beta z}^{LM}$$

les coefficients $h_{sr\alpha\beta z}^{LM}$ sont calculés et stockés sur une bande magnétique à l'aide d'un programme qui effectue l'intégration numérique sur les zones z du diagramme de Dalitz.

Lorsqu'on prend la moyenne par rapport aux états de spin du nucléon initial et la somme sur les états de spin du nucléons final c'est-à-dire lors de la sommation sur les indices μ_i, μ_f , la relation (II-17), que nous réécrivons sous la forme

$$B_{\mu_i \mu_f} \bar{Y}_L^M = (-1)^{\mu_i + \mu_f} \bar{B}_{-\mu_i - \mu_f} Y_L^M,$$

apporte une simplification dans le calcul des coefficients Γ_{LMz} et Δ_{LMz} . En effet pour deux valeurs opposées du couple d'indices μ_i, μ_f , les termes $\text{Im}(\bar{B}_{sk}^{M\alpha} Y_L^{M\alpha} \cdot B_{rn}^{M\beta} \bar{Y}_L^{M\beta})$ changent de signe et disparaissent donc dans la somme.

Si on développe ces termes de la manière suivante :

$$\text{Re } \bar{B}_{sk}^{M\alpha} B_{rn}^{M\beta} \cdot \text{Im } Y_{L\alpha}^{M\alpha} \bar{Y}_{L\beta}^{M\beta} + \text{Im } \bar{B}_{sk}^{M\alpha} B_{rn}^{M\beta} \cdot \text{Re } Y_{L\alpha}^{M\alpha} \bar{Y}_{L\beta}^{M\beta}$$

on voit que, dans l'expression des Γ_{LMz} qui sont les coefficients de $\text{Re } Y_{L\alpha}^{M\alpha} \bar{Y}_{L\beta}^{M\beta}$ on n'aura pas de termes contenant $\text{Im } \bar{B}_{sk}^{M\alpha} B_{rn}^{M\beta}$ en facteur ; et, de même, pas de termes en $\text{Re } \bar{B}_{sk}^{M\alpha} B_{rn}^{M\beta}$ dans l'expression des Δ_{LMz} .

2°/ Application de la méthode des moindres carrés

Ces calculs préalables étant faits pour toutes les combinaisons d'isobares, de sous-systèmes et d'ondes, on peut déterminer les paramètres

Re $A_{s\alpha}$ et Im $A_{s\alpha}$ en appliquant la méthode des moindres carrés à l'expression :

$$\sum_z \sum_{LM} \frac{(\Gamma_{LMz} - \tilde{\Gamma}_{LMz})^2}{Er^2 (\tilde{\Gamma}_{LMz})} + \frac{(\Delta_{LMz} - \tilde{\Delta}_{LMz})^2}{Er^2 (\tilde{\Delta}_{LMz})}$$

dans laquelle $\tilde{\Gamma}_{LMz}$, $\tilde{\Delta}_{LMz}$ et les erreurs correspondantes sont obtenus à partir des événements par la méthode des moments. Dans cette détermination la contrainte due à la valeur de la section efficace totale de la réaction apparaît sous la forme :

$$\Gamma_{00z} = \frac{Nz}{N} \cdot \frac{\sigma}{\pi \chi^2}$$

N étant le nombre d'événements utilisés pour l'énergie W (tableau IV) et

Nz étant le nombre d'événements de la zone z du diagramme de Dalitz.

Les sections efficaces que l'on peut déduire des résultats de l'analyse de la diffusion élastique, pour une valeur de J^P donnée soient

$$\sigma_{JP} = \pi \chi^2 (J + 1/2) (1 - \eta)^2_{JP} \quad (IV-4)$$

ne sont pas introduites comme contraintes dans l'ajustement comme c'est le cas dans la référence⁽¹¹⁾ pour des valeurs de l'énergie où le seuil de production de plus d'un pion n'est pas atteint.

3°/ Choix d'une phase de référence

La formule (IV-1) montre que l'on peut ajouter une même phase arbitraire aux amplitudes $A_{s\alpha}$ sans modifier la valeur des coefficients Γ_{LM} et Δ_{LM} si bien que, pour les dix-huit ondes introduites, nous avons à déterminer trente cinq paramètres réels après avoir, à chaque énergie, fixé la phase de l'une des amplitudes. Nous l'avons fait en donnant à la phase de l'amplitude de l'onde FF7 de production du Δ les valeurs de la phase de l'amplitude de l'onde élastique F37 (les valeurs utilisées sont interpolées à partir des résultats de la référence (12)).

Tableau IV

W Gev	1,58	1,64	1,68	1,73	1,78	1,81	1,90	1,97
T Gev	0,811	0,882	0,983	1,063	1,063	1,131	1,298	1,451
P Gev/c	0,837	0,940	1,012	1,114	1,105	1,263	1,432	1,585
p^* Gev/c	0,497	0,538	0,565	0,603	0,631	0,654	0,708	0,754
$\pi \chi^2$ mb	4,951	4,226	3,831	3,801	3,070	2,858	2,438	2,150
$\frac{\sigma}{\pi \chi^2}$	1,63	2,44	2,74	2,84	3,41	3,85	4,67	4,04
σ_{mb}	7,9	9,7	10,2	9,6	10,4	11,0	11,4	8,6
nb.d'év. ^{ts}	1291	2098	2202	4088	3113	3867	3208	2922
$\frac{nb.d'év.^{ts}}{deg.lib}$	22	16	16	31	23	29	24	22
nb. deg. lib.	57	133	133	133	133	133	133	133
χ^2/N	1,29	1,25	0,97	0,95	1,83	1,43	2,16	2,23
référence	17	16	18	19	20	19	16	9

Physiquement cela signifie que la production de la résonance

$\Delta(1950)7/2^+$ domine dans toutes les voies de la réaction pour les ondes $7/2^+$. Si on représentait l'amplitude résonance élastique par une formule de Breit et Wigner.

$\sqrt{\Gamma_{el}}/(E_r - E - i\Gamma)$ l'amplitude inélastique serait $\sqrt{\Gamma_r}/(E_r - E - i\Gamma)$; en examinant les diagrammes d'Argand (fig.11) on constate que l'amplitude élastique F37 décrit approximativement un cercle $r = \frac{1}{2} \sin \varphi$, compatible avec une formule de Breit et Wigner et présentant une forte inélasticité à la résonance. C'est pourquoi nous avons choisi cette onde pour relier les phases élastique et inélastique.

Remarque

Supposons que nous n'ayons que les deux canaux $\pi-N:(1)$ et $\pi-\Delta:(2)$: la matrice de transition peut s'écrire, avec les déphasages δ_1 et δ_2 :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} (\eta e^{2i\delta_1} - 1) & \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} e^{i(\delta_1+\delta_2)} \\ \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} e^{i(\delta_1+\delta_2)} & \frac{1}{2i} (\eta e^{2i\delta_2} - 1) \end{pmatrix}$$

La condition pour que les phases de T_{11} et T_{12} soient égales est :

$$\eta \cos(\delta_1 - \delta_2) = \cos(\delta_1 + \delta_2)$$

Comme cette égalité implique que l'une des valeurs propres de la matrice de transition soit nulle, on voit que la convention adoptée pour le choix de la phase de l'onde FF7 correspond à l'hypothèse physique d'un couplage total entre les deux canaux $\pi-N$ et $\pi-\Delta$.

4°) Obtention et tri des solutions

Pour appliquer la méthode des moindres carrés nous avons utilisé les programmes MINUIT et MINCON du C E R N.

A partir de chaque jeu de paramètres $A_{s\alpha}$ trouvé par le programme

principal, un sous-programme doit recalculer les coefficients Γ_{LMz} et Δ_{LMz} à partir des quantités $h_{\alpha\beta z}^{LM}$, puis l'expression (IV-3). (Pour une recherche de minimum la durée du calcul est de l'ordre de 10 minutes ; l'expression (IV-3) est calculée environ 6000 fois). Le programme MINCON, basé sur la méthode des directions conjuguées, s'est révélé le plus sûr et le plus rapide.

A chaque énergie, pour obtenir des solutions, nous avons fait un certain nombre de recherches de minimum, de l'ordre de quelques dizaines, en donnant au hasard les valeurs de départ des paramètres Re et Im $A_{\alpha\alpha}$. Ces essais ont été renouvelés un nombre de fois suffisant pour retrouver plusieurs fois les mêmes solutions. Ainsi la probabilité de laisser échapper une solution intéressante diminue beaucoup.

D'autre part on constate que les valeurs du χ^2 (IV-3) se regroupent au voisinage de la valeur minimale trouvée.

A l'issue de chaque recherche les sections efficaces du canal $p \pi^+ \pi^0$ relatives à chaque J^P sont recalculées et augmentées de la contribution du canal $n \pi^+ \pi^+$ provenant du mécanisme $p \pi^+ \rightarrow \Delta^+ \pi^+$ de manière à obtenir des nombres $\widetilde{\sigma}_{JP}$ plus proches des sections efficaces inélastiques totales σ_{JP} déduites de la valeur du paramètre d'élasticité η_{JP} tirée des résultats de l'analyse de la réaction élastique.

Une solution $A_{\alpha\alpha}$ acceptable devrait donner des valeurs $\widetilde{\sigma}_{JP}$ vérifiant la condition $\widetilde{\sigma}_{JP} < \sigma_{JP}$ puisque, outre la part du canal $n \pi^+ \pi^+$ qui ne passe pas par la production du $\Delta(1236)$, on ne tient pas compte des réactions à plus de trois corps dont la section efficace augmente rapidement en fonction de l'énergie (fig.11).

Les quelques solutions qui donnent une valeur du χ^2 nettement supérieure à la valeur minimale trouvée sont d'abord éliminées. (par degré de liberté, tableau IV, les valeurs du χ^2 sont comprises entre 0,9 et 2,3, les valeurs les plus fortes correspondant aux énergies les plus élevées.)

Ensuite nous avons encore écarté les solutions tout à fait incompatibles avec le critère $\widetilde{\sigma}_{JP} < \sigma_{JP}$, c'est-à-dire celles qui fournissent une valeur élevée de $\widetilde{\sigma}_{JP}$ alors que l'analyse de la réaction élastique indique une section efficace σ_{JP} faible^{*}.

Enfin, à partir des solutions ainsi retenues, un programme permet de recalculer les distributions des variables suivantes (fig.12) :

$$w_3^2 = m_{p\pi^+}^2 ; \quad w_2^2 = m_{p\pi^0}^2 ; \quad w_1^2 = m_{\pi^+\pi^0}^2 ; \quad \cos \Theta ; \quad \Phi ; \quad \cos \alpha = \cos \widetilde{\theta}$$

(α est l'angle des directions initiale et finale du nucléon).

Les distributions de la masse carrée du dipion et de $\cos \Theta \sim Y_1^0(\Theta, \Phi)$ sont ajustées par le programme : les recalculer constitue une simple vérification. La restitution des autres distributions dépend par contre de tous les coefficients ajustés.

La répartition de l'angle Φ avec son maximum à 180° et les deux spectres de masse carrée des systèmes pion-nucléon sont des tests sensibles pour classer les solutions. Des solutions, équivalentes jusque là, diffèrent par le rendu de ces spectres en particulier dans la zone intermédiaire entre les pics des deux isobares.

C'est à partir de ces trois critères : valeur du χ^2 , de $\widetilde{\sigma}_{JP}$, et restitution des spectres, que nous avons choisi la solution présentée sur les figures 8,9 et 10.

On pourrait discuter des différences existant entre la solution retenue et quelques autres qui, sans satisfaire aussi bien aux critères utilisés, en sont cependant voisines. Mais nous savons qu'il manque les ondes partielles $J = 5/2, 7/2$ de production du ρ et comme nous avons constaté que l'introduction

^{*} Au dessous de 2 Gev, et pour des ondes d'isospin $3/2$, il n'y a pas de désaccord notable entre les analyses de la réaction élastique faites au CERN, à Saclay ou à Glasgow, c'est pourquoi nous nous limitons aux résultats de Saclay.

d'une onde supplémentaire peut modifier sensiblement les autres ondes, cette discussion nous a semblé prématurée. Nous nous en tiendrons aux traits marquants de la solution retenue pour apprécier la valeur du modèle et les résultats qu'il permet d'atteindre.

C - Les résultats

1°- Indétermination des phases

Les diagrammes d'Argand des dix-huit amplitudes $A_{s\alpha}$ (fig.10) ne laissent voir aucune variation ordonnées des phases en fonction de l'énergie. D'ailleurs nous avons obtenu des solutions donnant des résultats comparables en modules mais qui diffèrent beaucoup par les phases.

Il y aurait deux moyens de faire des prédictions théoriques sur les phases : soit en utilisant des formules de Breit et Wigner, mais les diagrammes d'Argand des amplitudes élastiques montrent que, sauf pour l'onde F37 (fig.7), il faudrait introduire un fond supplémentaire ce qui augmente le nombre de paramètres, soit en utilisant le modèle d'échange qui implique des amplitudes réelles.

D'autre part les contraintes d'ajustement sont plus fortes pour les modules des amplitudes que pour leurs phases car la connaissance du nombre d'événements par zone a plus d'importance pour la détermination des modules tandis que les effets d'interférence, dépendant des phases, restent relativement faibles.

La méthode d'ajustement basée sur le maximum de vraisemblance (dans laquelle on utilise le produit des valeurs prises, pour chaque événement, par la fonction qui représente la section efficace différentielle) pourrait donner un peu plus de précision dans la détermination des phases. Néanmoins, comme elle nécessite actuellement beaucoup plus de temps de calcul, on peut encore envisager, dans une étape ultérieure, d'améliorer le découpage du diagramme de Dalitz pour obtenir des ajustements plus contraignants.

2 - Comparaison avec les sections efficaces inélastiques

Les résultats sont présentés sur la figure 8. Les valeurs de $\sigma_{jP} / (J+1/2)\pi \chi^2$ tirées de la référence (12) sont reportées avec leur barre d'erreur. Pour les $\tilde{\sigma}_{jP}$ correspondant à l'ensemble de solutions que nous avons retenu, les erreurs n'ont pas été calculées (le calcul serait très long pour un résultat assez peu significatif ; les erreurs statistiques calculées pour les modules (fig.9) permettent d'apprécier les ordres de grandeurs). Le résultat obtenu peut être considéré comme satisfaisant si l'on se souvient qu'il n'y a pas d'autre contrainte pour assurer la cohérence que celle due à la section efficace de la réaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^0$. Pour $J \leq 3/2$ l'ajustement est fait en tenant compte de la production du Δ et du ρ (seules manquent les ondes $PF3$ et $DD3$ du ρ ; $j_1 = 3/2$). A 1,58 Gev, pour $P3(J^P=3/2^+)$ on obtient un résultat trop élevé ainsi qu'à 1,81 Gev pour $D3(J^P=3/2^-)$. Pour $P3$ nous n'avons trouvé aucune solution plus faible. Pour $D3$ une solution donnant une valeur acceptable de $\sigma_{3/2^-}$ conduit à une restitution moins satisfaisante des spectres de masse carrée pion-nucléon.

Dans l'ensemble le modèle permet néanmoins de retrouver les valeurs des sections efficaces inélastiques prévues par l'analyse de la réaction élastique.

Pour $J=5/2, 7/2$ la production du ρ n'est pas prise en compte dans les calculs et les désaccords sont flagrants ; mais ils peuvent avoir une autre cause : la production de quatre corps et plus.

A en croire les résultats de nos ajustements cette production semble liée aux ondes $D5(J^P=5/2^-)$ et $F7(J^P=7/2^+)$; pour ces valeurs de J^P une seule onde a été utilisée et on peut penser que, lorsque les ondes du ρ seront introduites, on obtiendra une répartition différente de l'inélasticité disponible pour la production de plus de trois corps.

En fonction de l'énergie on retrouve les maximums correspondant aux

résonances élastiques et il est intéressant de voir dans quelles ondes partielles inélastiques elles se manifestent.

3 - Variations en modules des amplitudes d'ondes partielles

La figure 3 permet de voir de quelles amplitudes d'ondes partielles $A_{s\alpha}$ relèvent les structures des sections efficaces σ_{JP}

Le pic de la résonance $S_{31} \Delta(1640)$ est en évidence. L'amplitude SD_1 du Δ en suit assez fidèlement la variation et sa part est certainement prépondérante puisque, à 1,640 GeV la masse normale du ρ se place hors de l'espace de phase ; cependant on trouve une contribution non négligeable des deux amplitudes $SD_1 \rho_{3/2}$ et $SS_1 \rho_{1/2}$ ce qui indique l'importance des effets d'interférence.

La résonance $P_{31} \Delta(1930)$ est bien visible : cette fois c'est l'onde PP_1 du $\rho_{1/2}$ qui en reproduit le mieux la variation ; le $\rho_{3/2}$ semble avoir plutôt un effet moyen tandis que la production du Δ est moins importante.

Pour l'onde P_{33} on voit, en se reportant au diagramme d'Argand de l'amplitude élastique⁽¹²⁾ (fig.7), que l'augmentation de la section efficace, après une petite structure à 1,68 GeV, est due principalement à l'onde PP_3 du $\rho_{1/2}$ alors que l'onde PP_3 du Δ donne une contribution moyenne.

Le $\Delta(1690) D_{33}$ semble relié essentiellement à la production du Δ dans les deux ondes DS_3 et DD_3 . Les deux ondes de ρ introduites ne sont pas négligeables et ceci incite à penser que si l'on avait mis aussi DD_3 du $\rho_{3/2}$ elle aurait probablement apporté aussi une contribution. C'est une des caractéristiques de cette analyse :

- on ne découvre pas d'onde dont la contribution serait suffisamment faible pour pouvoir se dispenser de l'introduire dans les calculs d'ajustement.

A partir du spin $J=5/2$ inclus il n'y a plus d'ondes de production du ρ dans le modèle.

La seule onde de production du Δ utilisée en D5 est loin de saturer l'inélasticité prévue sauf pour un point : à 1,73 Gev ; toutes les solutions obtenues sont en accord sur ce point.

Deux explications sont possibles :

- l'absence du ρ dans l'ajustement d'une part,
- la production de plus de 3 corps, qui se manifesterait à partir de $J=5/2$, d'autre part.

Pour les ondes F5 l'inélasticité de la résonance F35 $\Delta(1910)$ n'est pas saturée et on peut faire les mêmes remarques que pour D5.

Enfin pour FF7 le Δ est produit d'une manière appréciable lors de la désintégration de la résonance F37 $\Delta(1950)$.

Au terme de cette analyse on peut d'abord noter qu'aucune amplitude ne s'est révélée réellement négligeable, même quand la masse nominale de la résonance intermédiaire, ici le ρ , est en dehors de l'espace de phase. A 1,64 Gev, d'autre part, nous avons obtenu un ajustement nettement meilleur, en particulier pour $\sigma_{1/2-}$, en conservant l'onde FF7 du Δ , ce que l'analyse des résultats expérimentaux n'imposait pas. Les désaccords flagrants commencent lorsqu'on ne tient pas compte du ρ ($J=5/2, 7/2$) et il apparaît tout à fait souhaitable d'introduire toutes les ondes du ρ . Il en manque 9 dans cette analyse ; encore faudra-t-il disposer d'un nombre d'événements suffisant pour obtenir des déterminations significatives des 18 paramètres supplémentaires correspondants.

Enfin la production de plus de trois particules semble passer par les ondes partielles $J=5/2$ et $7/2$ ce qui est en contradiction avec l'idée que, au seuil d'une réaction, les ondes de bas moment angulaire sont prépondérantes.

D - Evaluation d'une largeur partielle.

Parmi les résonances dont la formation est possible dans la réaction $p\pi^+ \rightarrow p\pi^+\pi^0$ seul le Δ (1950 $7/2^+$) est classé dans un multiplet de SU3 : le décuplet $7/2^+$.

A partir des valeurs de l'amplitude de l'onde FF7 de production du Δ nous pouvons obtenir la largeur partielle de la désintégration $\Delta 7/2^+ \rightarrow \Delta 3/2^+ + \pi$.

La largeur partielle élastique est la valeur de l'amplitude à la résonance. En se reportant à la figure (7) on prendra

$$x_{el} = \Gamma_{el} / \Gamma = 0,5$$

Et pour l'amplitude inélastique (fig.10) nous prendrons $\sqrt{x_{el} x_{in}} = 0,25$. Pour une largeur totale $\Gamma = 200$ Mev on obtient ainsi $\Gamma_{in} = 25$ Mev. A partir de cette largeur partielle nous pouvons calculer g^2 , g étant la constante de couplage caractéristique du décuplet $7/2^+$; g et Γ_{in} sont reliés par la formule

$$\Gamma_{in} = C^2 g^2 B'_\lambda(p) \frac{m}{M} p$$

C est le facteur isoscalaire qui relie le produit de représentations $\{8\} \otimes \{10\}$ de SU3 à la représentation $\{10\}$ dans la décomposition

$$\{8\} \otimes \{10\} = \{35\} + \{27\} + \{10\} + \{8\}$$

$$C = \begin{pmatrix} \{8\} & \{10\} & \{10\} \\ 1,8 & 3/2,1 & 3/2,1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$B'_\lambda(p) = p^{2\ell}$ est le facteur de barrière centrifuge⁽¹⁴⁾

p est l'impulsion, dans le centre de masse de la résonance, des produits de la résonance dont M est la masse. A partir de ces données on trouve :

$$g^2 = 4,1 \quad \text{pour} \quad \Delta(1950)7/2^+ \rightarrow \Delta(1236)3/2^+ + \pi$$

Cette valeur, en raison du théorème de Wigner-Eckart, doit être comparable à celle que l'on pourrait obtenir pour la désintégration $\Sigma(2030)7/2^+ \rightarrow \Sigma(1385)3/2^+ + \pi$ qui fait intervenir des états de base différents des mêmes représentations. Le

facteur isoscalaire serait alors

$$\left(\begin{array}{cc|c} \{8\} & \{10\} & \{10\} \\ 1,0 & 1,0 & 1,0 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

On ne dispose pas actuellement de résultats concernant cette réaction et permettant le calcul de la constante de couplage correspondante.

E - Calcul des amplitudes d'ondes partielles de production du ρ par échange d'un pion.

Pour les valeurs de l'énergie les plus élevées, dans le domaine que nous étudions, les diagrammes de Chew et Low, dans lesquels on porte pour chaque événement le transfert d'impulsion au nucléon en fonction de la masse du dipion⁽⁹⁾, montrent une production préférentielle du dipion vers l'avant. Cette caractéristique est également décelable sur les distributions de $\cos \alpha$, angle entre les impulsions initiales et finales du nucléon (fig.12).

Les amplitudes d'ondes partielles $A_{s\alpha}$ que nous essayons de déterminer par un ajustement global, grâce au modèle isobarique, doivent rendre compte, parmi les autres caractères de la réaction, de cette production périphérique du dipion.

Cependant on peut aussi calculer, au moyen des modèles d'échange, une amplitude de production du ρ par échange d'un pion (ou de production d'un isobare par échange d'un ρ) et projeter cette amplitude sur les ondes partielles définies par des couplages ℓ -s (cf II)

On peut en effet se demander si, au moins pour certaines ondes, ces projections ne représenteraient pas une approximation des amplitudes $A_{s\alpha}^{(W)}$ que nous avons cherché à déterminer ; sans oublier cependant que les amplitudes $t_{\alpha}(W, w_1)$, calculées à partir d'un terme de pôle, sont des nombres réels.

Pour calculer ces amplitudes nous avons programmé les formules établies par Bijtebier⁽⁴⁾.

L'utilisation du formalisme lagrangien lui permet, au moyen des règles de Feynman et de représentations tensorielles des états de spin, d'écrire des amplitudes invariantes pour les opérations du groupe de Lorentz et du groupe SU2 pour l'isospin.

Puis, pour adapter le résultat obtenu au formalisme de la matrice S, il remplace les constantes de couplage par des fonctions des impulsions aux vertex et le propagateur du π échangé pour une fonction du carré de sa quadri-impulsion.

L'amplitude de transition entre les deux états de spin $|s\rangle$ et $|s'\rangle$ du nucléon s'écrit alors, avec les notations de la référence ⁽⁴⁾:

$$A^{ss'} = \omega \alpha_{1\pi} \sum_j t_j A_j^{ss'}$$

ω est la forme de Breit-Wigner qui exprime la désintégration du dipion,

$\alpha_{1\pi}$ le produit des coefficients de Clebsch-Gordan d'isospin,

j l'indice des ondes partielles,

$A_j^{ss'}$ le produit des deux coefficients de Clebsch-Gordan qui figure dans la formule (II-7), et

t_j l'amplitude d'onde partielle que nous nous proposons de calculer. Bijtebier montre que les t_j peuvent s'écrire sous la forme

$$t_j = \sum_n P_{jn} F_n \quad ; \quad F_n = F_n(W^2, m_3^2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x_3^n \nu dx_3$$

Les P_{jn} sont des polynômes qui dépendent de la masse m_3 du dipion produit,

x_3 est le cosinus de l'angle des directions du pion initial et du nucléon final,

$\nu = \Lambda (\tau^2 - \mu^2)^{-1} \frac{m}{2} [(k_{30} + m)(k_0 + m)]^{1/2}$; dans cette dernière expression

Λ est un facteur de forme qui regroupe toutes les fonctions inconnues des impulsions qui ont été introduites pour passer au formalisme de la matrice S. m, k_0, k_{30}

sont respectivement la masse du nucléon et son énergie, initiale et finale ; μ la masse du pion ; t^2 le carré du transfert d'impulsion du pion initial au nucléon final.

Les hypothèses les plus simplificatrices conduiraient à prendre $\Lambda = 1$. Nous avons pris au contraire pour Λ une expression utilisée par Baton et al⁽¹⁵⁾ dans l'étude de la diffusion pion pion à partir de la réaction $\sigma\text{-}p \rightarrow \pi\text{-}p\pi^0$ soit

$$|\Lambda| = \frac{p_{23}}{\tilde{p}_{23}} \left[1 - \frac{f_1(m_3^2)}{\sigma_{\pi^0\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^-}(m_3^2)} \frac{t^2 - \mu^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

p_{23} et $\tilde{p}_{23}$ sont respectivement les impulsions d'un pion final et du pion initial dans le centre de masse du dipion et on peut écrire

$$\frac{p_{23}}{\tilde{p}_{23}} = \left[1 - \frac{t^2 - \mu^2}{2 p_{23}^2} + \frac{(t^2 - \mu^2)^2}{4 m_3^2 p_{23}^2} \right]$$

Les valeurs utiles de $f_1(m_3^2)$ et de $\sigma_{\pi^0\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^-}(m_3^2)$ sont tirées de ⁽¹⁵⁾. A partir de ces matériaux nous avons fait un programme pour calculer les valeurs de $t_\alpha(W, w_1)$ pour dix ondes du $\rho(j_1 = 3/2)$ et sept ondes du $\rho(j_1 = 1/2)$ et pour trois valeurs différentes de la masse w_1 du dipion : la masse du ρ et les deux valeurs qui s'en écartent d'une demi-largeur. Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 14.

On voit d'abord que, lorsque l'énergie totale W augmente, la dépendance en w_1 , s'atténue rapidement, surtout pour les ondes de moment orbital initial S, P et D.

La comparaison avec les modules des amplitudes $A_{\rho\alpha}$ (fig.9) est possible pour les ondes SD1, PP1, PP3, DS3 du $\rho(j_1 = 3/2)$ et SS1, PP1, PP3 du $\rho(j_1 = 1/2)$. Pour SD1 et PP1 $j_1 = 3/2$ on peut voir, en comparant les figures 14 et 9 que, compte tenu des erreurs assez importantes qui entachent les déterminations des $A_{\rho\alpha}$, on trouve des comportements à peu près constants et du même ordre de grandeur : 0,2 à 0,15.

Pour PP3 et DS3 du ρ 3/2 on pourrait à la rigueur utiliser les t_α comme un fond sur lequel s'ajouteraient les variations trouvées pour les $A_{\alpha\alpha}$. Pour les quatre ondes du ρ 1/2 les $A_{\alpha\alpha}$ sont rapidement croissants alors que les t_α sont constants (SS1), ou nettement décroissants, en fonction de l'énergie. Le désaccord est donc total.

L'examen de la figure 14 montre encore que les amplitudes, au moins dans la gamme d'énergie 1,5-2 Gev, ne croissent pas en fonction du moment orbital incident. Or on s'attendait à ce que les amplitudes d'échange, qui sont liées au mécanisme périphérique, soient relativement plus importantes pour les ondes de grand moment orbital.

F - La réaction $p \pi^+ \rightarrow n \pi^+ \pi^+$

A chaque énergie nous disposons, en plus des événements $\pi^+ \pi^0 p$, de ceux de la voie $n \pi^+ \pi^+$ en nombre approximativement quatre fois moindre.

Nous ne les avons pas utilisés dans un ajustement simultané des sections efficaces différentielles des deux voies comme cela a été fait pour la réaction $\pi^- p \rightarrow p \pi^- \pi^0$ ou $n \pi^+ \pi^0$.

Pour la voie $n \pi^+ \pi^+$ Deler a montré⁽¹⁵⁾ que, en plus de la production du Δ , on constate, dans les spectres de masse, celle des résonances $N^*(1520)$ D13 et $N^*(1680)$ D15. De plus l'étude du rapport de charge $\frac{\pi^+ \pi^+ n}{\pi^+ \pi^0 p}$ indique la présence d'une interaction $\pi^+ \pi^+$ avec l'isospin 2.

L'étude simultanée des deux voies impliquerait donc cinq états intermédiaires, résonnants ou non. Les coefficients de Clebsch-Gordan d'isospin montrent que les effets du Δ sont 6,5 fois plus forts dans la voie $p \pi^+ \pi^0$ tandis que ceux des N^* le sont 4 fois plus dans la voie $n \pi^+ \pi^+$ si bien que les deux voies se présentent de manière très différente, tant par les mécanismes que par le nombre d'événements.

A partir des valeurs des amplitudes de production du Δ dans l'étude du canal $p \pi^+ \pi^0$ nous avons calculé la section efficace de production du Δ pour la voie $p \pi^+ \rightarrow \Delta^+ \pi^+ \rightarrow n \pi^+ \pi^+$. Pour cela on utilise la formule (II-19) avec des valeurs nulles pour les amplitudes de production du ρ et des facteurs d'isospin

$$H_{\Delta 3} = H_{\Delta 2} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$$

La section efficace ainsi calculée est approximative puisqu'elle ne tient pas compte des interférences avec les autres résonances intermédiaires possibles. On ne peut pas l'additionner avec celles que l'on pourrait calculer de la même manière en isolant par exemple la production du $N^*(1680)$. Dans la mesure où les interférences sont faibles on obtient quand même des indications sur le canal $n \pi^+ \pi^+$.

La production du Δ se révèle approximativement constante avec une section efficace de l'ordre de 1,5 mb alors que la section efficace du canal $n \pi^+ \pi^+$ passe de 1,5 à 4 mb entre 1,6 et 2 Gev (fig.11). La production des deux $N^*(1520)$ et (1680) augmente donc dans cet intervalle d'énergie.

Ce résultat est plus visible lorsqu'on compare les spectres de masses carrées $n \pi^+$ recalculés, aux histogrammes expérimentaux (fig.13).

Quant aux trois distributions : $\cos \Theta$, $\cos \alpha$ et ϕ elles nous montrent que l'absence du ρ provoque une diminution du nombre d'événements pour lesquels l'impulsion incidente est voisine du plan des trois particules finales ($\cos \Theta \approx 0$) et, corrélativement, du nombre des événements pour lesquels le nucléon est émis vers l'arrière ($\cos \alpha = -1$). On retrouve une fois encore que la production du ρ est liée à des collisions périphériques.

C O N C L U S I O N

Après avoir appliqué le formalisme relativiste de l'analyse en ondes partielles, dû à Moussa et Stora⁽¹⁾, à la réaction $p \pi \rightarrow p \pi^+ \pi^0$, nous avons poursuivi l'étude entreprise par Deler en introduisant, en plus des dix ondes de production du $\Delta(1236)$, huit ondes de production du ρ .

Ceci nous a permis d'aboutir à une détermination de dix-huit amplitudes d'ondes partielles pour huit valeurs de l'énergie totale comprises entre 1,6 et 2 Gev.

Au niveau des sections efficaces de la réaction, relatives à chaque valeur de J^P , l'accord avec les résultats de l'analyse de la réaction élastique de Ayed, Bareyre et Villet⁽¹²⁾ est en général satisfaisant.

C'est sur cet accord que se fonde la confiance que l'on peut accorder à la détermination des modules, dont les variations nous renseignent sur les rôles respectifs des productions du ρ et du Δ dans la formation des résonances d'isospin $3/2$ entre 1,6 et 2 Gev. La résonance $\Delta(1650)1/2^-$ se désintègre surtout par la voie $\pi \Delta$; la voie $p \rho$ n'est pas négligeable mais elle peut en onde S, inclure du fond. La désintégration de la résonance $\Delta(1930)1/2^+$ semble plutôt liée à la voie $p \rho$ ($j_1 = \frac{1}{2}$) et celle du $\Delta(1690)3/2^-$ à la voie $\pi \Delta$. On remarque qu'il y a une différenciation assez nette entre les deux séries d'ondes de production du ρ distinguées par la valeur de la somme des spins du ρ et du nucléon.

Par contre, l'imprécision de la détermination des phases relatives des amplitudes nous empêche, sauf pour une onde, d'obtenir des largeurs partielles à partir des boucles décrites dans les diagrammes d'Argand. Remarquons incidemment que dans le cas des réactions $K p \rightarrow \Lambda \pi$ ou $\Sigma \pi$ ces déterminations sont plus aisées

car on décrit les amplitudes d'ondes partielles du système hypéron-pion par une formule de Breit et Wigner dont on ajuste les paramètres, largeur et énergie à la résonance, en fonction de l'énergie.

De l'amplitude de l'onde FF7 de production du $\Delta(1236)$ et moyennant l'hypothèse que, pour $J=7/2$, toute la réaction passe par la formation du

$\Delta(1950)7/2^+$ nous avons déduit la largeur partielle de la transition

$$\Delta(1950)7/2^+ \rightarrow \Delta(1236)3/2^+ + \pi$$

Nous avons enfin montré que, malgré l'importance des effets périphériques liés à la production du ρ , les amplitudes d'ondes partielles calculées à partir du modèle d'échange d'un pion, grâce aux formules données par Rijkstebier⁽⁴⁾, ne constituent pas une première approximation permettant de simplifier ensuite la détermination des amplitudes dans le cadre du modèle isobarique.

Quant aux directions dans lesquelles pourraient se poursuivre cette étude, il nous semble que l'étape suivante, surtout si on peut disposer de nouvelles expériences à grande statistique, devrait être de reprendre les ajustements avec toutes les ondes correspondant aux sous-systèmes résonnants. Une étude devrait alors être faite pour savoir si la méthode du maximum de vraisemblance se révèle réellement plus puissante pour connaître les phases. Cette étude devra tenir compte de la mise en service à Saclay d'une calculatrice plus puissante (CDC 6700) qui permettra, moyennant un nouvel effort de programmation, de bâtir des programmes plus complexes incluant toutes les ondes nécessaires.

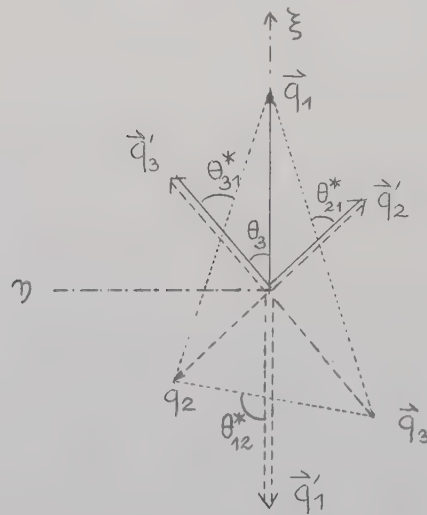
Face au formalisme, puissant et élégant, basé sur les représentations au groupe de Poincaré, par lequel sont résolus les problèmes de compositions de spins, c'est-à-dire l'analyse en ondes partielles, il faut souhaiter que des indications théoriques nouvelles permettent de dépasser le modèle isobarique pour aborder une étude approfondie du mécanisme des interactions dans l'état final.

APPENDICE A - Notations

$O x y z$	Système d'axes lié au laboratoire. Oz coïncide avec la direction du faisceau incident.
$O X Y Z$	Système d'axes lié au centre de masse général (C.M.G.). OZ coïncide avec la direction des pions incidents.
q_p, q_π	Quadri-impulsions des particules initiales.
q_i	Valeur de l'impulsion initiale dans le centre de masse.
q_k	Quadri-impulsions des particules finales $q'_k = q_n + q_h$
q_{kn}^*	Impulsion de la particule n du sous-système k mesurée dans le centre de masse de ce sous-système.
h, k, n	Indices des particules finales et des sous-systèmes correspondants
	$1 \begin{cases} \text{nucléon} \\ \text{dipion} \end{cases} \quad 2 \begin{cases} \pi^+ \\ p \pi^0 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} \pi^0 \\ p \pi^+ \end{cases}$
r, s	Indices des résonances $\Delta, \rho, N^*, \sigma$ etc..
W	Energie totale dans le C.M.G.
$P(W, o, o, o)$	Quadri-impulsion totale dans le C.M.G.
$O\xi\eta\zeta, O\xi'\eta'\zeta'$	Systèmes d'axes liés au C.M.G. et définis par :
	$O\xi = \vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 / q_1 q_2 \quad O\xi = \vec{q}_1 / q_1 $ $O\zeta' = - \vec{q}_k / q_k \quad O\eta' = \vec{q}_k \wedge \vec{q}_n / q_k q_n $
Θ, Φ	Angles polaire et azimutal de O Z dans $O\xi\eta\zeta$
$\tilde{\Theta}, \tilde{\Phi}$	Angles polaire et azimutal de O Z dans $O\xi'\eta'\zeta'$
θ_o	Angle de production du nucléon final dans le CM du dipion
θ_k	Angle de $\vec{q}'_k$ avec $O\xi$ dans le plan $O\xi\eta$
θ_{kh}^*	Angle de désintégration de la particule h du sous-système k mesuré dans un système lié à son centre de masse

$$\cos \theta_{kh}^* = \frac{-\vec{q}_k \cdot \vec{q}_{kh}^*}{|q_k| |q_{kh}^*|} = \left| \frac{w_n^2 - 1/2 (w_n^2 \max + w_n^2 \min)}{1/2 (w_n^2 \max - w_n^2 \min)} \right| w_k^{-2}$$

μ_i, μ_f	Projections du spin du nucléon initial et final sur $O\zeta$
$J \ J_z \ J_\zeta$	Spin total et ses projections sur OZ et $O\zeta$
$L' \ M'$	" Moment orbital " entre une particule finale et le sous-système complémentaire, et sa projection sur $O\zeta$
$L \ M$	" Moment orbital " et sa projection sur $O\zeta$ dans l'état initial
j	Spin des sous-systèmes $N \ \pi$, ou:.
j_1	Somme des spins du nucléon et du dipion
l, m	Moment orbital des sous-systèmes et sa projection sur $O\zeta$
$\alpha \ \beta$	Indices désignant des ondes partielles ($J \ L \ L'$)
Ω	Angle de rotation de Wigner
$w_k^2 \ w_n^2$	Masses carrées invariantes des sous-systèmes k et n .
I	Spin isotopique d'un sous-système.



[P]: l'emploi de ce symbole rappelle qu'au quadri-vecteur P est associé un système de référence, un tétrade, permettant de définir le spin du système ; lorsque le système est au repos on associe à la quadri-impulsion $P = (W, 0, 0, 0)$ les trois quadri-vecteurs orthogonaux :

$n_1(\overset{\circ}{P}) = (0, 1, 0, 0)$ $n_2(\overset{\circ}{P}) = (0, 0, 1, 0)$ et $n_3(\overset{\circ}{P}) = (0, 0, 0, 1)$ cet ensemble est désigné par $[\overset{\circ}{P}]$

Soit alors $[P \leftarrow \overset{\circ}{P}]$ la transformation de Lorentz pure telle que

$$P = [P \leftarrow \overset{\circ}{P}] \overset{\circ}{P} : [P] \text{ est défini par } [P] = [P \leftarrow \overset{\circ}{P}] [\overset{\circ}{P}]$$

Dans la littérature on désigne par $[P]$ la tétrade elle-même ou la transformation $[P \leftarrow \overset{\circ}{P}]$ qui permet de l'obtenir à partir de $[\overset{\circ}{P}]$.

$e^{i\Omega_k \mu_F}$: ce facteur provient de la rotation subie par les axes $n_i(\overset{\circ}{q}_1)$ lorsque, pour le couplage en cascade, on effectue les transformations de Lorentz

successives indiquées sur la figure

L'axe $n_3(\overset{\circ}{q}_1) = O\zeta$, perpendiculaire au plan des trois transformations est invariant.

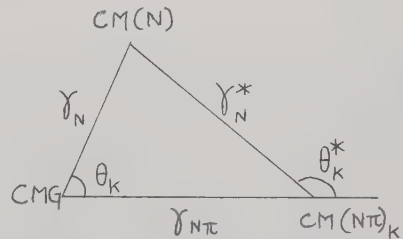
La rotation d'angle Ω_k et d'axe $n_3(\overset{\circ}{q}_1)$

vérifie la relation $[q_1 \leftarrow q_{k1}^*] [q_{k1}^* \leftarrow \overset{\circ}{q}_1] = [q_1 \leftarrow \overset{\circ}{q}_1] R(O\zeta, \Omega_k)$

Multiplions à gauche par $[q_1 \leftarrow \overset{\circ}{q}_1]^{-1} = [\overset{\circ}{q}_1 \leftarrow q_1]$ nous obtenons:

$R(O\zeta, \Omega_k) = [\overset{\circ}{q}_1 \leftarrow q_1] [q_1 \leftarrow q_{k1}^*] [q_{k1}^* \leftarrow \overset{\circ}{q}_1]$. La suite de ces trois transformations laisse $\overset{\circ}{q}_1$ invariant mais pas $n_1(\overset{\circ}{q}_1)$ et $n_2(\overset{\circ}{q}_1)$. L'angle Ω_k est donné par la formule $\sin \frac{\Omega_k}{2} = \frac{1}{4} \gamma_{N\pi} \gamma_N^* \sin \theta_k^*$

où $\gamma = \frac{|\vec{q}|}{m} = \beta \gamma$; c'est donc aussi une fonction des coordonnées dans le diagramme de Dalitz.



Pour la réaction $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^0$ à 1,97 Gev nous avons trouvé pour une valeur maximale de 63 milliradians soit 3°6.

APPENDICE B - Liaison avec le formalisme de Deler-Valladas

Le produit de coefficients de Clebsch-Gordan, formule (52) de la référence (1):

$$\langle [\tilde{P}] J J_z L \mu_i | [q_\pi] q_\pi \mu_i \rangle \langle [q_1] q_2 q_3 \mu_f | [\tilde{P}] J J_z L' j \ell w_k^2 \mu_f \rangle$$

donné par Deler et Valladas est, en supprimant les facteurs de normalisation mais en incluant le facteur $e^{i\Omega_k \mu_f}$ de la formule (51) :

$$\begin{aligned} f_{\mu_i \mu_f}^{J L L' j \ell} &= \left(\frac{2J+1}{2L+1} \right)^{1/2} \sum_m \sum_{\mathcal{L}} \sum_{M_F^*} \sum_{\nu} \sum_{\lambda \geq 0} (-1)^{j+1/2} \left\langle \begin{matrix} J & j & L \\ -\lambda & \lambda & 0 \end{matrix} \right\rangle [1 + (-1)^{L+m+1}] \\ &\quad \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 & j \\ \nu & M_F^* & \lambda \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 & J & \mathcal{L} \\ M_F^* & -\lambda & -\nu \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 & J & \mathcal{L} \\ \mu_f & m - \mu_f & m \end{matrix} \right\rangle d_{m, \nu}^{\mathcal{L}} \left(\frac{\pi}{2} \right) (-i)^\nu P_\ell^\nu(\cos \theta^*) \\ &\quad \left\langle \begin{matrix} J & 1/2 & L \\ m - \mu_f & \mu_i & m - \mu_f + \mu_i \end{matrix} \right\rangle \bar{Y}_L^{m - \mu_f + \mu_i}(\Theta, \Phi) e^{i\Omega_k \mu_f} e^{im\theta_k} \end{aligned}$$

λ, M_F^*, ν composantes de spin sur l'impulsion du sous-système $N\pi$

μ_f, m composantes de spin sur la normale 0 au plan des particules finales

$\mathcal{L}$ somme des moments orbitaux finals

L la parité de $L' + \ell + 1$

Posons $M = m + \mu_f - \mu_i$ $J_z = \mu_f - m = \mu_i - M$

Nous avons

$$Y_L^M(\Theta, \Phi) \left\langle \begin{matrix} J & 1/2 & L \\ m - \mu_f & \mu_i & M \end{matrix} \right\rangle = \bar{Y}_L^M(\Theta, \Phi) (-1)^{1/2 + \mu_i + M} \left(\frac{2L+1}{2J+1} \right)^{1/2} \left\langle \begin{matrix} L & 1/2 & J \\ M & \mu_i & J_z \end{matrix} \right\rangle$$

$$(-i)^\nu P_\ell^\nu(\cos \theta^*) = \sqrt{2\pi} \sum_{m'} d_{m', \nu}^{\ell} \left(0, \frac{\pi}{2}, \pi \right) Y_\ell^{m'} \left(\frac{\pi}{2}, \theta^* \right)$$

$$= \sum_{m'} e^{-i\pi m'} d_{\nu m'}^{\ell} \left(\frac{\pi}{2} \right) Y_\ell^{m'} \left(\frac{\pi}{2}, \theta^* \right)$$

le facteur $\sqrt{2\pi}$ provient de la correspondance établie par (19) de (1)

$$\sum_{\mathcal{L}} \sum_{\nu} \sum_m \left\langle \begin{matrix} 1/2 & J \\ M_F^* & -\lambda \end{matrix} \middle| \mathcal{L} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 & J \\ \mu_F & m-\mu_F \end{matrix} \middle| \mathcal{L} \right\rangle d_{m,\nu}^{\mathcal{L}} \left(\frac{\pi}{2} \right) = d_{-\lambda, m-\mu_F}^J \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{M_F^*, \mu_F}^{1/2} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

En regroupant les fonctions $d \left(\frac{\pi}{2} \right)$ on obtient successivement :

$$d_{\nu m}^{\mathcal{L}} d_{M_F^*, \mu_F}^{1/2} = \sum_{j'} \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ \nu & M_F^* \end{matrix} \middle| j' \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ m' & \mu_F \end{matrix} \middle| j' \right\rangle d_{\lambda, m'+\mu_F}^{j'}$$

$$d_{\lambda, m'+\mu_F}^{j'} d_{-\lambda, m-\mu_F}^J = \sum_{L''} \left\langle \begin{matrix} J & j \\ -\lambda & \lambda \end{matrix} \middle| L'' \right\rangle \left\langle \begin{matrix} J & j' \\ m-\mu_F & m'+\mu_F \end{matrix} \middle| L'' \right\rangle d_{0, m'}^{L''}$$

On peut alors écrire :

$$\sum_{M_F^*} \sum_{\nu} \sum_{\lambda > 0} \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ \nu & M_F^* \end{matrix} \middle| j \right\rangle \left\langle \begin{matrix} J & j' \\ -\lambda & \lambda \end{matrix} \middle| L' \right\rangle \sum_{j'} \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ \nu & M_F^* \end{matrix} \middle| j' \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ m' & \mu_F \end{matrix} \middle| j' \right\rangle$$

$$\sum_{L''} \left\langle \begin{matrix} J & j \\ -\lambda & \lambda \end{matrix} \middle| L'' \right\rangle \left\langle \begin{matrix} J & j' \\ m-\mu_F & m'+\mu_F \end{matrix} \middle| L'' \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ m' & \mu_F \end{matrix} \middle| j \right\rangle \left\langle \begin{matrix} J & j' \\ m-\mu_F & m'+\mu_F \end{matrix} \middle| L' \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ m' & \mu_F \end{matrix} \middle| j \right\rangle \left\langle \begin{matrix} L' & j \\ -M' & m'+\mu_F \end{matrix} \middle| J_{\zeta} \right\rangle \left(\frac{2L'+1}{2J+1} \right)^{1/2} (-1)^{j+m'+\mu_F}$$

et $d_{0, m'}^{L'} \left(\frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{M'} \left(\frac{4\pi}{2L'+1} \right)^{1/2} Y_L^{-M'} \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$

Or $m = M' - m'$ et parité de $L = \text{parité de } L' + \ell + 1$ si bien que le facteur

$1 + (-1)^{L+m+1}$ s'élimine avec les coefficients qui accompagnent $Y_L^{-M'} \left(\pi/2, \pi \right)$ et $Y_L^{m'} \left(\pi/2, \theta^* \right)$. La formule initiale devient, compte tenu de $e^{im\theta}$

$$p_{\mu_i \mu_F}^{J L L' j \ell} = \sum_{m' M'} \left\langle \begin{matrix} \ell & 1/2 \\ m' & \mu_F \end{matrix} \middle| j \right\rangle Y_{\ell'}^{m'} \left(\frac{\pi}{2}, \theta^* - \theta \right) \left\langle \begin{matrix} L & j \\ -M' & m'+\mu_F \end{matrix} \middle| J_{\zeta} \right\rangle \left(\frac{8\pi^2}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{L'}^{-M'} \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \theta \right) \\ \left\langle \begin{matrix} L & 1/2 \\ M & \mu_i \end{matrix} \middle| J_{\zeta} \right\rangle Y_L^M(\theta, \phi) (-1)^{M+M'+\mu_i+\mu_F}$$

L'étude de la parité a montré que $L + M$ est pair donc, pour L fixe, M a une parité définie. Dans l'état final $\eta_{\pi} (-1)^{L'+M'} (-1)^{\mu_i - \mu_f}$ est pair donc pour L' fixé $(-1)^{M+M'+\mu_i - \mu_f}$ sort du signe $\sum$. Enfin le facteur $\left(\frac{8\pi^2}{2J+1}\right)^{1/2}$ s'élimine avec le facteur correspondant qui se trouve dans l'expression de l'amplitude totale (51) de la référence ⁽¹⁾.

R E F E R E N C E S

+ + + + + + + + + + + + + + + +

- 1 - B. Deler, G. Valladas - Practical formulation of the isobar model,
N.C., 10 45 (1960).
- 2 - P. Moussa, R. Stora - Angular analysis of elementary particle reactions.
Analysis of scattering and decay - Gordon and Breach (1968).
- 3 - G. Mahoux - Cinématique relativiste. Cours à la Faculté d'Orsay (1971);
à paraître.
- 4 - J. Bijtebier - Ondes partielles et modèles d'échange dans les réactions
 $\pi N \rightarrow \pi \pi N$, Bulletin de la classe des sciences de l'Académie royale
de Belgique, 5ème série, tome LV (1969) 4 et 5.
- 5 - G. Smadja - Etude des réactions $\pi^- p \rightarrow \pi^- p \pi^0$ et $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$ au
dessous du Gev , Thèse, Paris (1969).
- 6 - J. Werle - Relativistic Theory of Reactions - North-Holland (1966).
- 7 - P. Moussa - Analyse angulaire en mécanique quantique relativiste,
Rapport C E A, R 3608 (1968).
- 8 - Mc Kerrel - Relativistic Two- and Three-Body Particles States,
N.C. , XXXIV n°5 (1964) p.1289.
- 9 - M.A. Jabiol - Création d'un et plusieurs mésons π dans les interactions
 $\pi^+ p$ à 1,6 Gev/c, Thèse, Orsay (1966).
- 10 - J. Dolbeau - Contribution à l'étude de la réaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0 p$.
Analyse paramétrique des résultats expérimentaux.
Application à l'analyse en ondes partielles - Orsay (1968).
- 11 - M.G. Bowler, R.J. Cashmore - Single pion production in $\pi^+ p$ interactions
between 0,6 and 0.8 Gev/c, Rutherford Laboratory, Preprint R P P/H/59.

- 12 - R. Ayed, P. Bareyre, G. Villet - Pion Nucleon Phase shift analysis up to 2.8 GeV/c - Phys. Lett., 31 B 598 (1970).
- 13 - A. Donnachie - Modern developments in Hadron Physics - Proceedings of the 1970 CERN School of Physics - CERN 71.11.
- 14 - J. Meyer, D.E. Plane - Stray baryonic resonances and SU3 - Nuclear Physics, B 25 (1971) 428-442.
- 15 - J.P. Baton, G. Laurens, J. Régnier - Etude de la diffusion élastique $\pi^- \pi^0$ par la méthode d'extrapolation de Chew et Low à partir de la réaction $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^0 p$ à 2,77 GeV/c - Nuclear Physics, B 3 (1967).
- 16 - B. Deler - Contribution à l'étude de la diffusion inélastique $\pi^+ p$ pour des énergies du π incident voisines de 1 GeV, Thèse, Rapport C E A, R 3579 (1969).
- 17 - J. Debaisieux et al. - $\pi^+ p$ interactions at 850 MeV/c , Nuclear Physics B 5 (1968) p. 147-157.
- 18 - W.J. Metzger et al. - $\pi^+ p$ interactions at 900 MeV, Phys. Rev., 164 5 (1967) p. 1680.
- 19 - G.W. Tautfest and R.B. Willmann - Single Particle Exchange in N^{*++} production in $\pi^+ p$ collisions, Proc. 2nd Topical Conf. on Resonant Particles Athens (1965).
- 20 - A. Berthon; P. Ladron de Guevara - Communication privée.
- 21 - Ph. Chavanon, M. Crozon, T. Leray, J. Tocqueville - Détermination de la répartition angulaire des π^0 dans la réaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^0$ entre 600 et 1300 MeV, Phys. Lett., 28 B 4 (1968) p.296.

R E M E R C I E M E N T S

+++++

A Monsieur le Professeur Francis PERRIN qui, en m'accueillant dans son laboratoire du Collège de France, m'a permis de me reconvertir de la chimie à la physique des particules, j'exprime toute ma gratitude.

Monsieur le Professeur BERTHELOT m'a donné l'hospitalité au Département de Physique des Particules élémentaires de Saclay où j'ai trouvé d'excellentes conditions de travail ; je lui en suis profondément reconnaissant.

J'ai trouvé un accueil amical et stimulant dans le service de Monsieur ROGOZINSKI que je remercie de l'intérêt qu'il m'a manifesté. Monsieur FROISSART qui lui a succédé a bien voulu s'intéresser à ce travail et je le remercie de ses conseils et de ses remarques.

A Georges VALLADAS qui m'a proposé cette étude tout au long de laquelle il m'a guidé et encouragé vont mes remerciements les plus chaleureux.

B. DELER a mis à ma disposition des programmes et surtout les données expérimentales qu'il avait réunies ou élaborées ; il m'a aussi fait bénéficier de son expérience, de tout je le remercie très vivement.

Je veux aussi dire ma reconnaissance à G. SMADJA qui m'a aidé en m'initiant patiemment à l'analyse angulaire relativiste.

C'est avec plaisir que j'évoque les échanges profitables et amicaux que j'ai eus avec Madame NEVEU, Messieurs NGUYEN THUC DIEM, DOLBEAU et BOUCHEZ ; j'espère qu'ils se poursuivront dans l'avenir.

Je remercie également Messieurs A. BERTHON, J. BIJTEBIER et G. MAHOUX avec qui j'ai eu de fructueuses discussions.

Je remercie Mesdames MASSEI et PIETE qui ont dactylographié ce texte

et la présentation des figures.

Je remercie enfin l'équipe du laboratoire de Physique nucléaire du Collège de France qui a imprimé cette thèse avec beaucoup de soin.

$(\sigma/\pi\lambda^2)(N_z/N)\sqrt{2\pi}\sum_l \text{Re} Y_L^M(\theta, \phi)$ en fonction de $m_{\rho\pi^+}^2$

0.1 coincide avec l'impulsion du dipion. $\circ m_{\rho\pi^+} < m_{\rho\pi^0}$ $\bullet m_{\rho\pi^0} < m_{\rho\pi^+}$

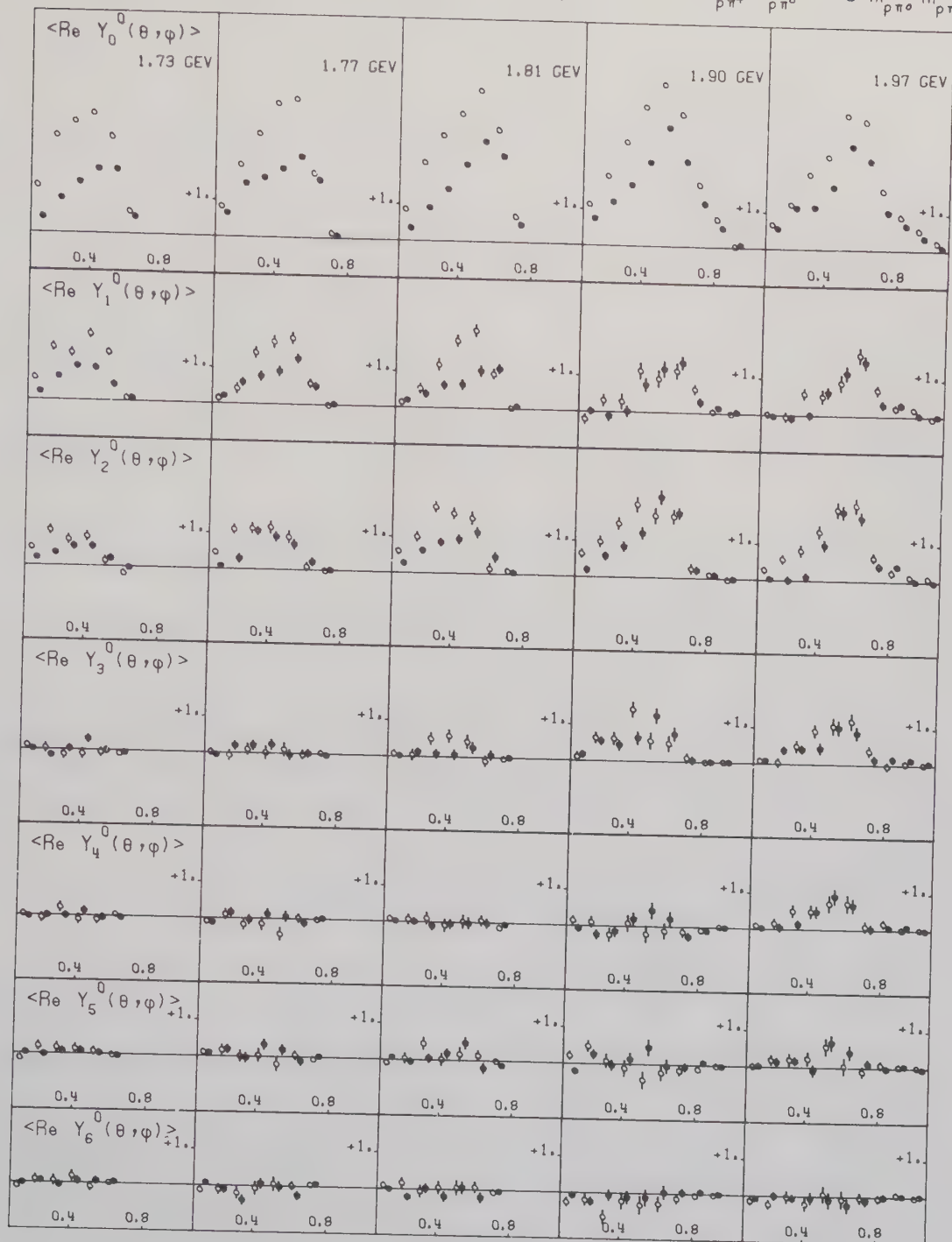


FIG. 1 a

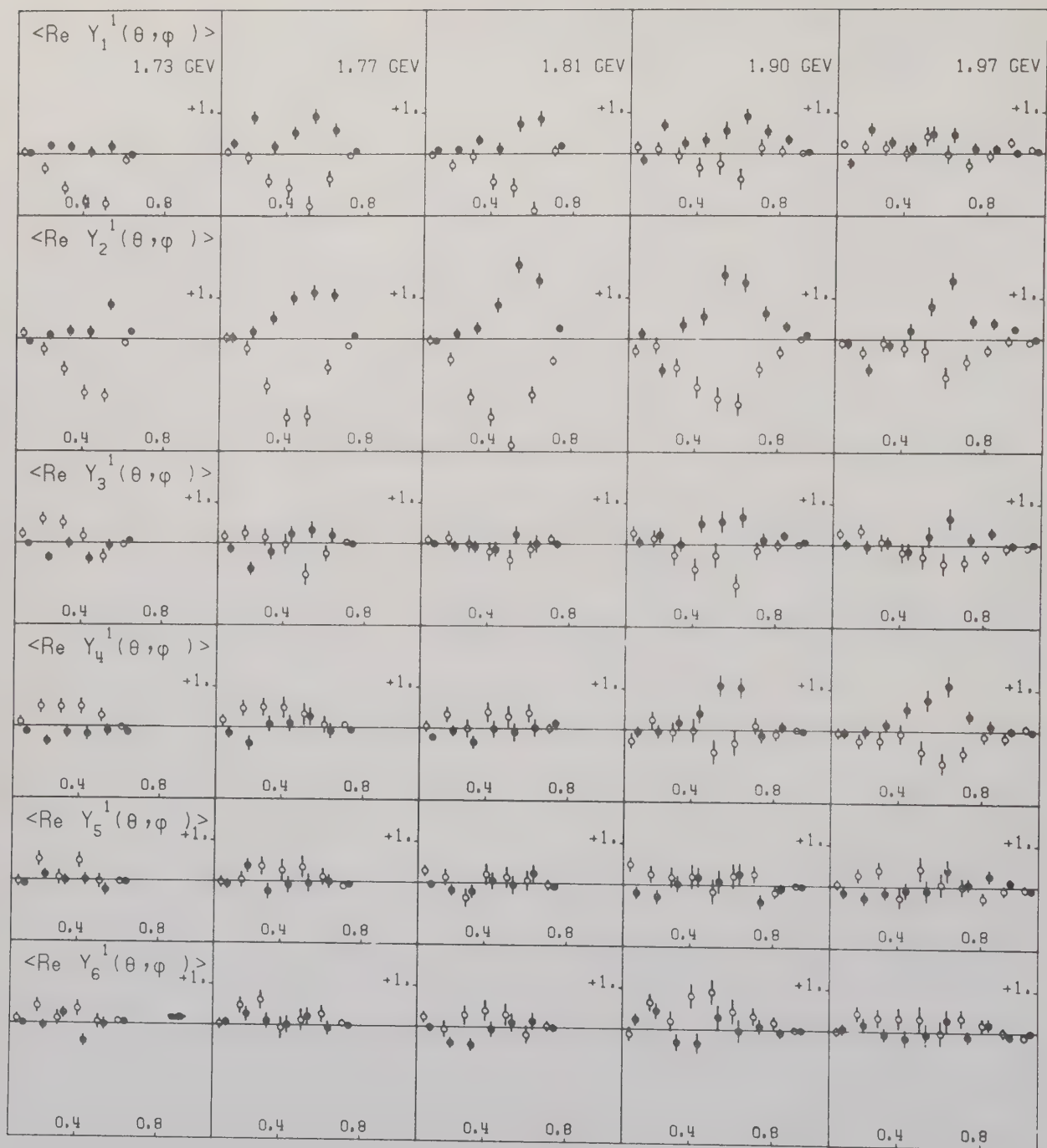


FIG. 1 b

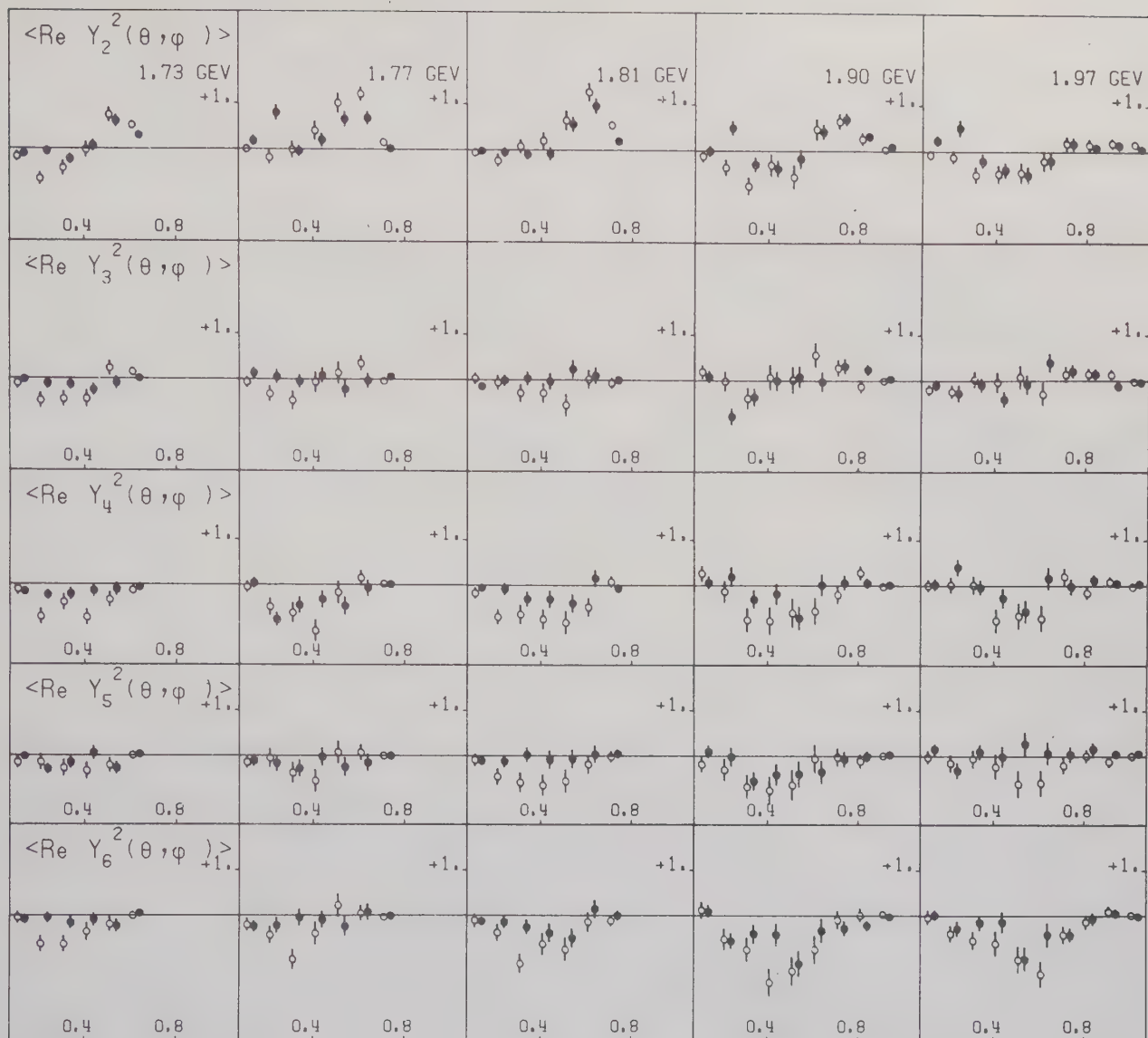


FIG. 1c

$(\sigma/\pi\lambda^2)(N_z/N)\sqrt{2\pi}\sum_l \text{Re} Y_l^M(\theta, \phi)$ en fonction de $m_{\pi\pi}^2$
 ϕ est opposé à l'impulsion du π^0

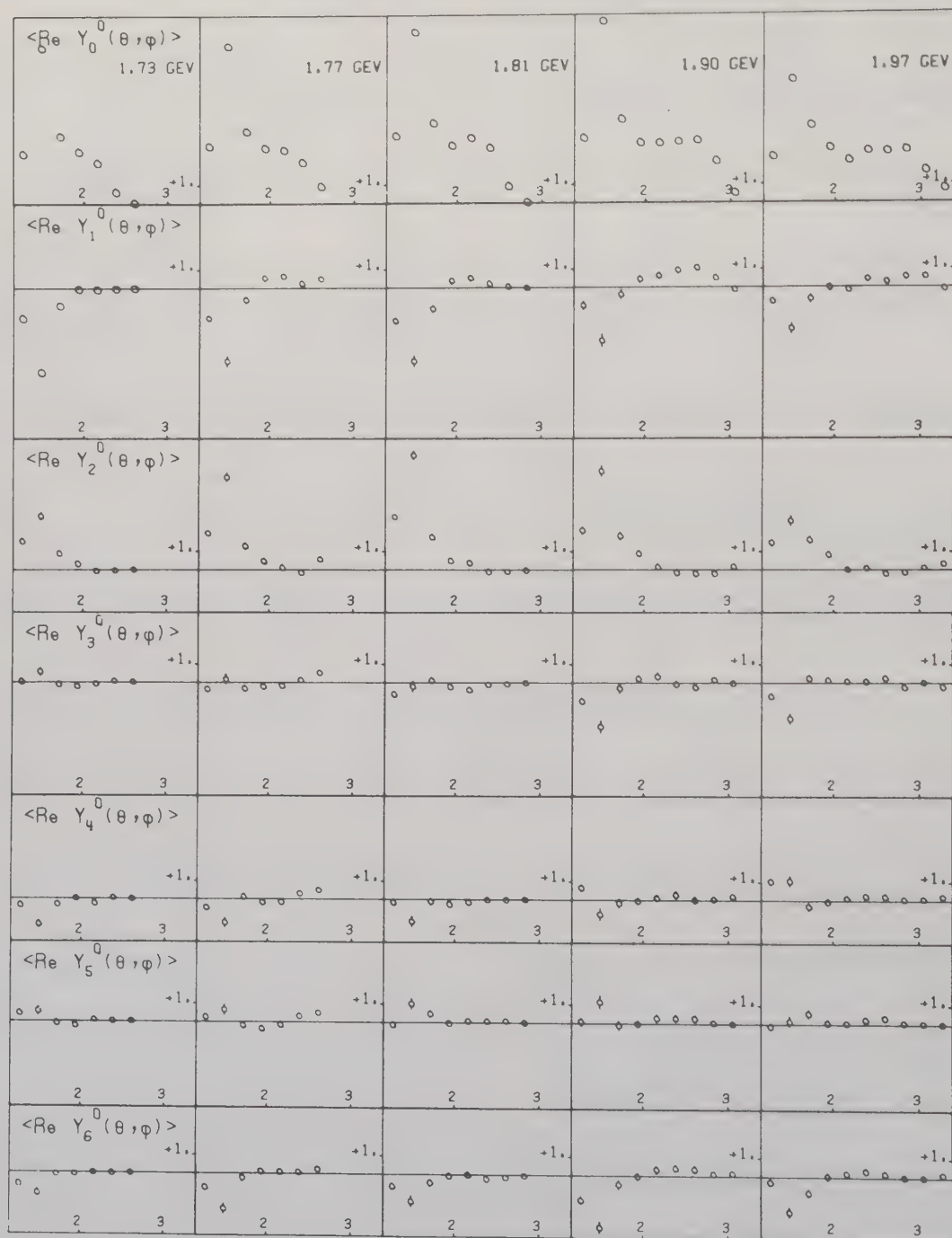


FIG. 2a

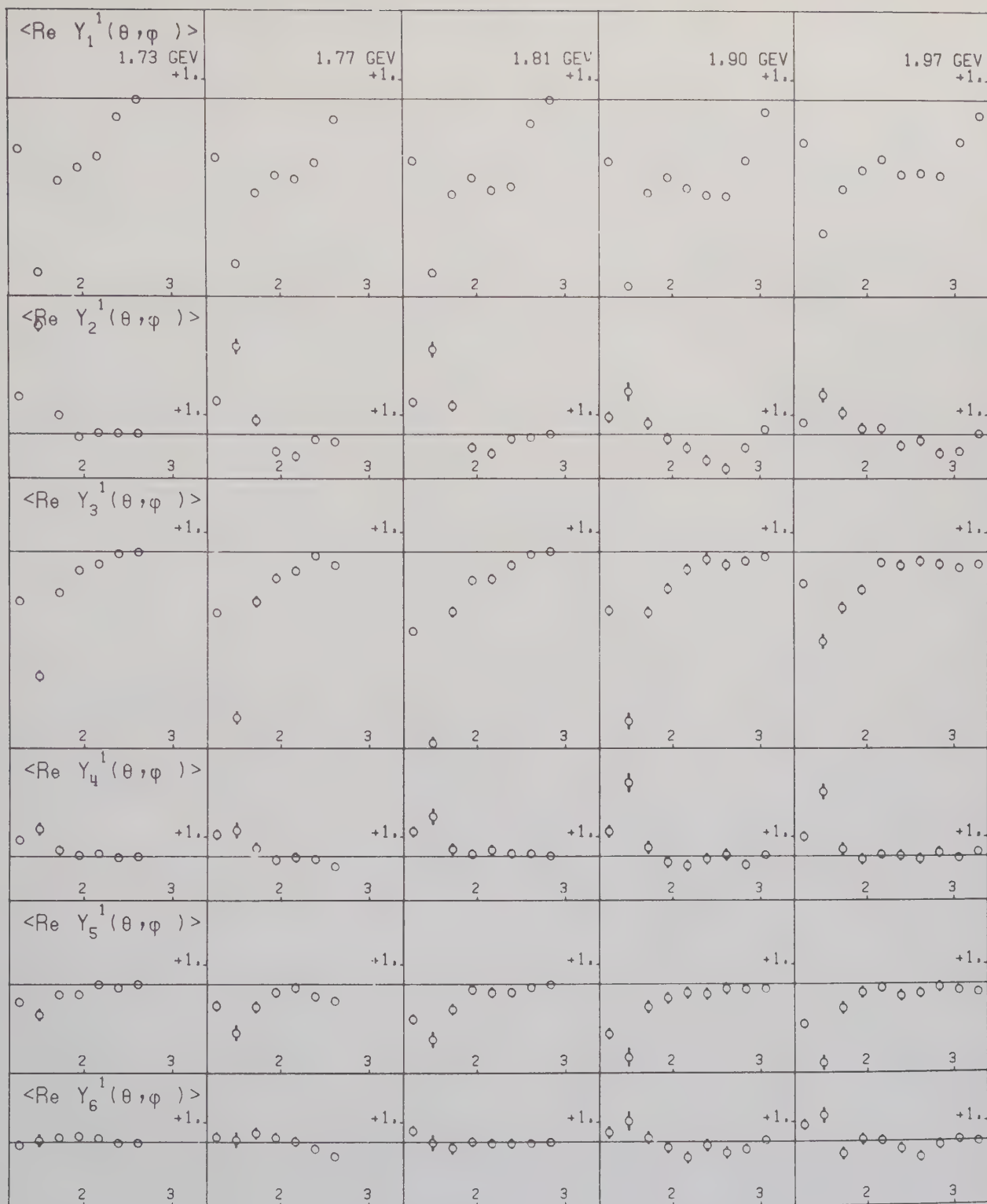


FIG. 2b

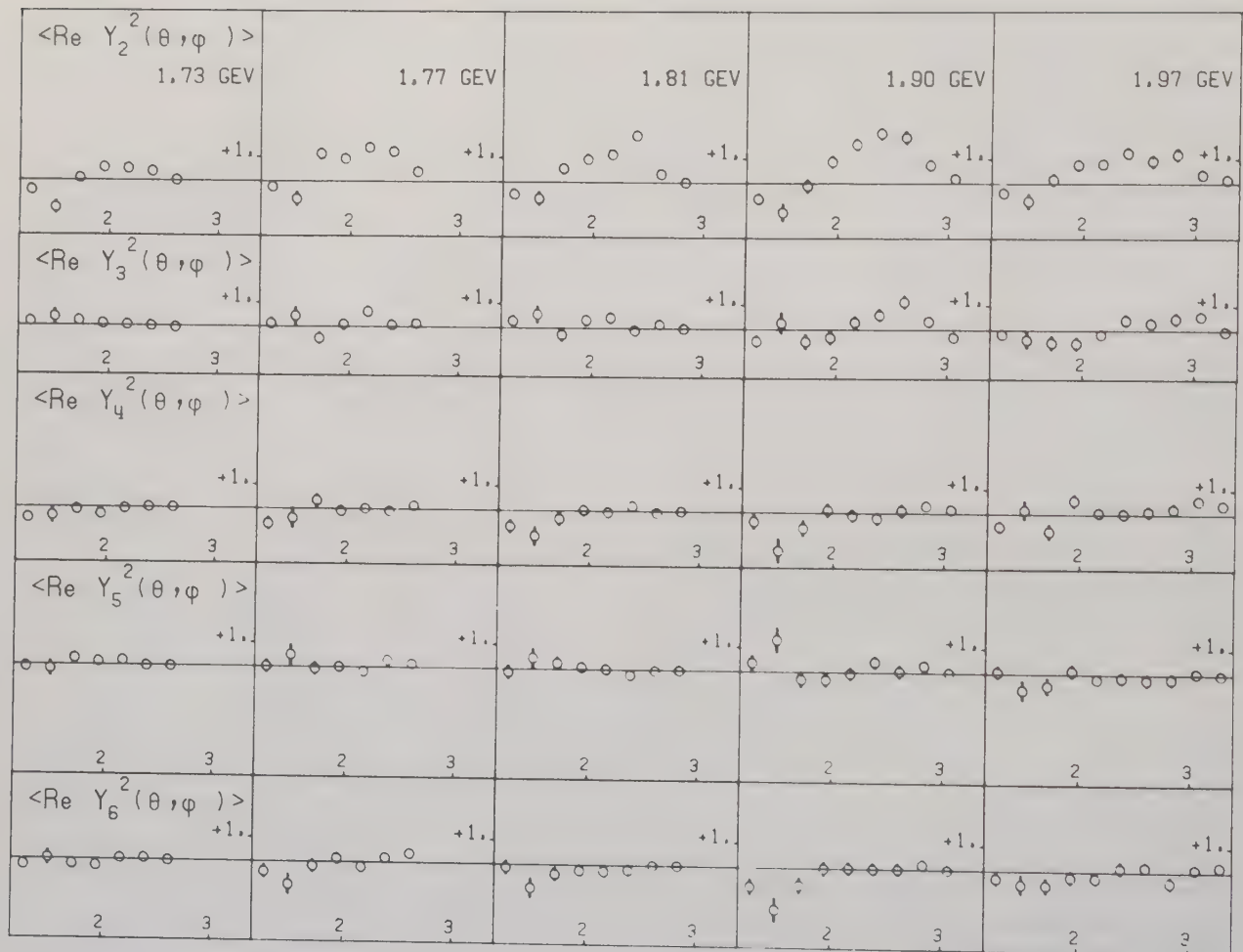


FIG. 2c

$d\sigma/d\cos\theta$ de production du dipion; unités $\pi\lambda^2$
 0< suivant l'impulsion du dipion.

○ $m_{p\pi^0} > m_{p\pi^+}$ • $m_{p\pi^+} > m_{p\pi^0}$

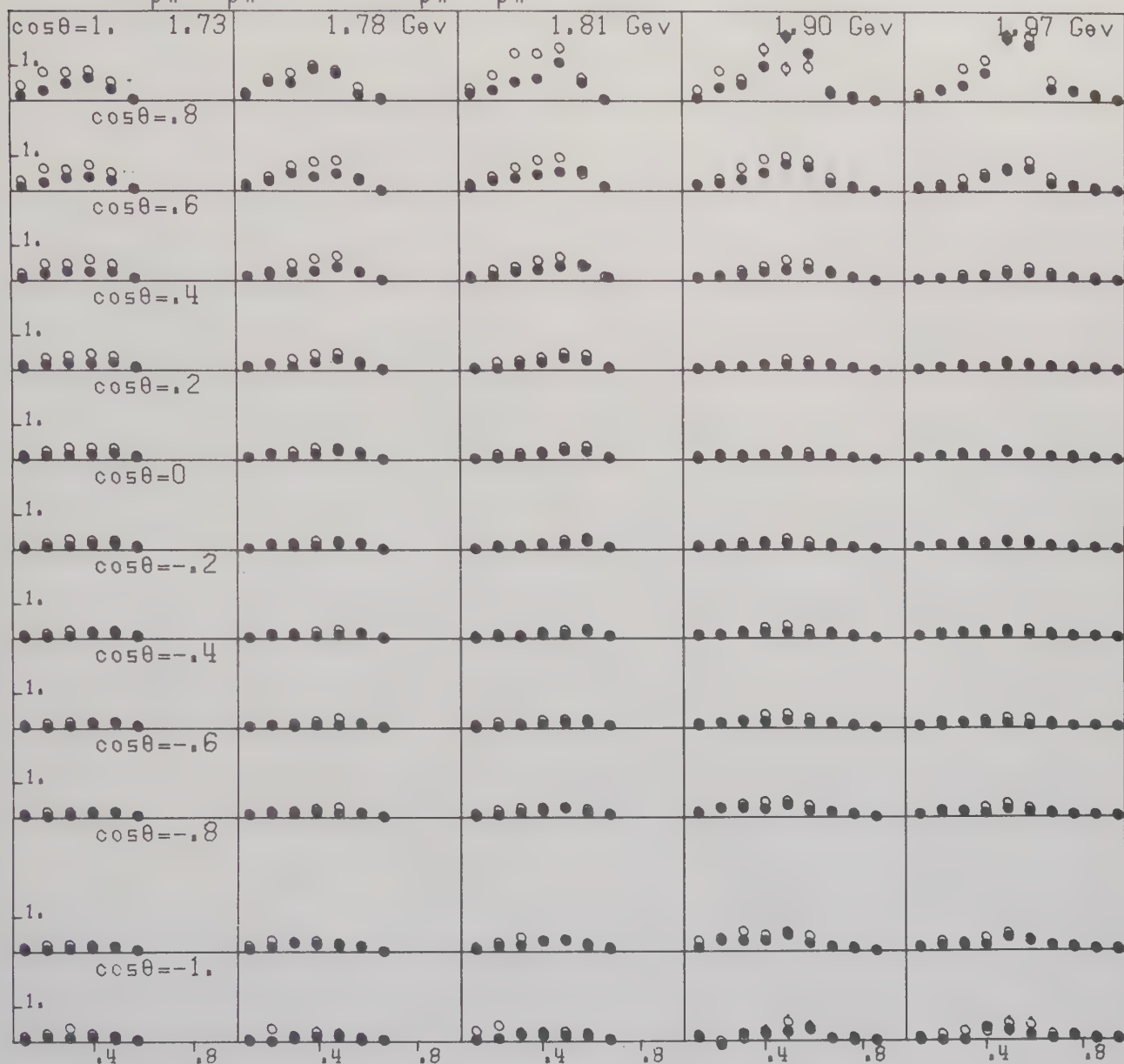


Fig. 3

$d\sigma/d\cos\theta$ de production du sous-système $p\pi_2^+$
 OZ opposé à l'impulsion du π^0 unités $\pi\lambda$

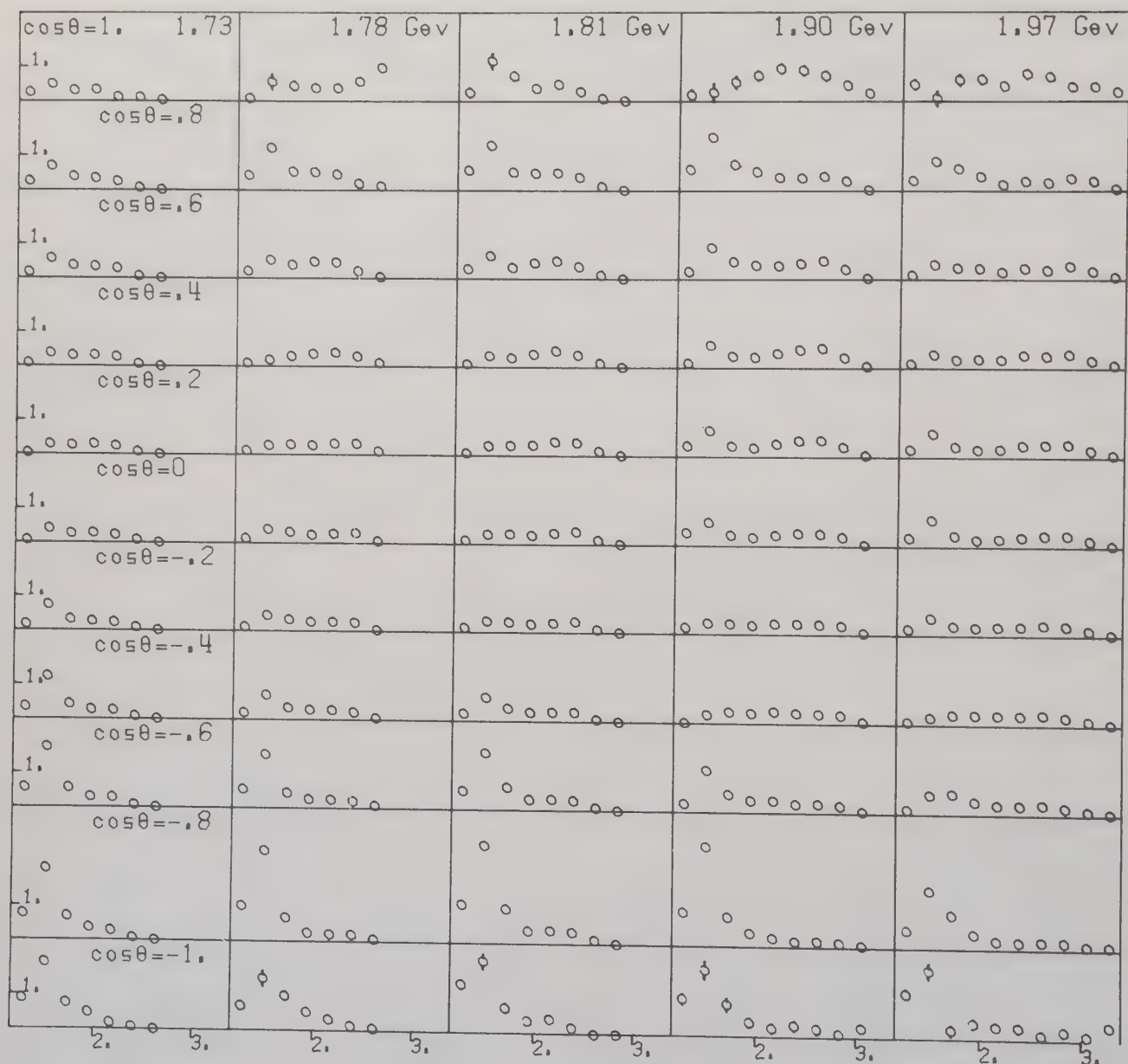


FIG. 4

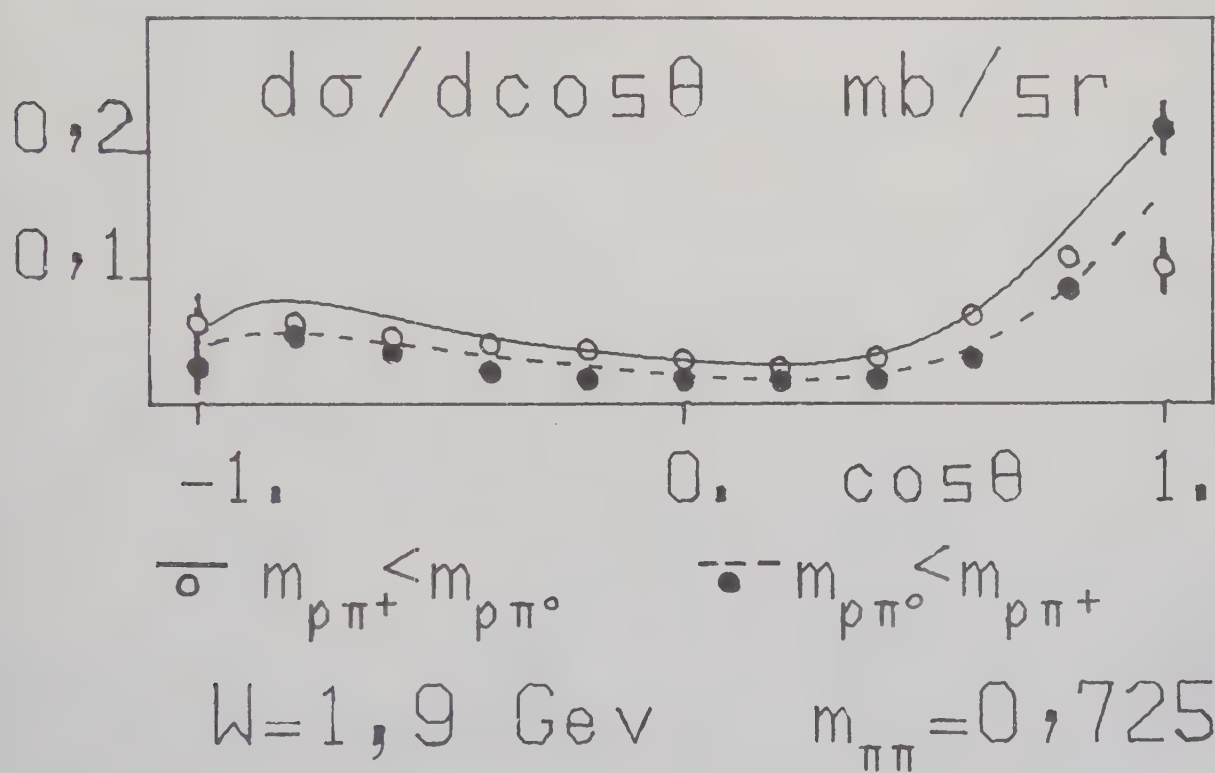
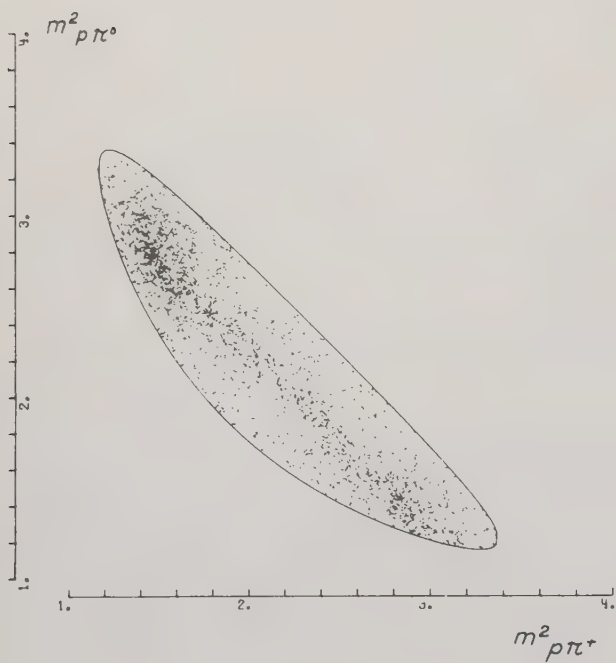
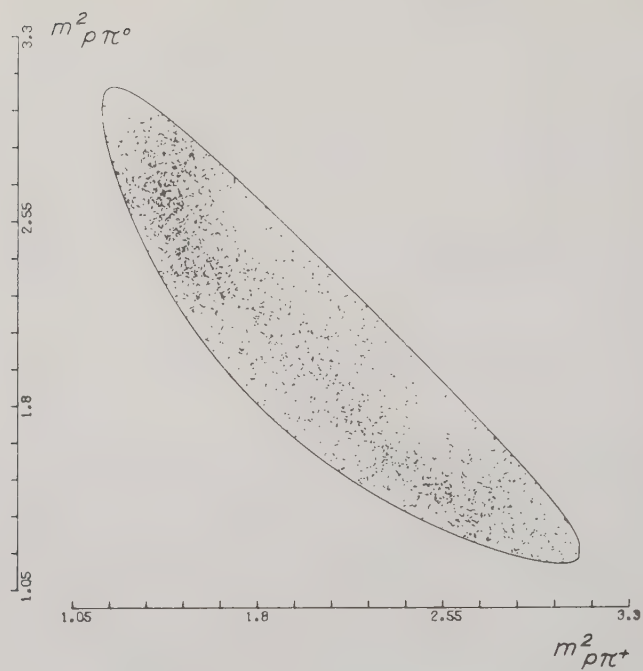


fig. 5



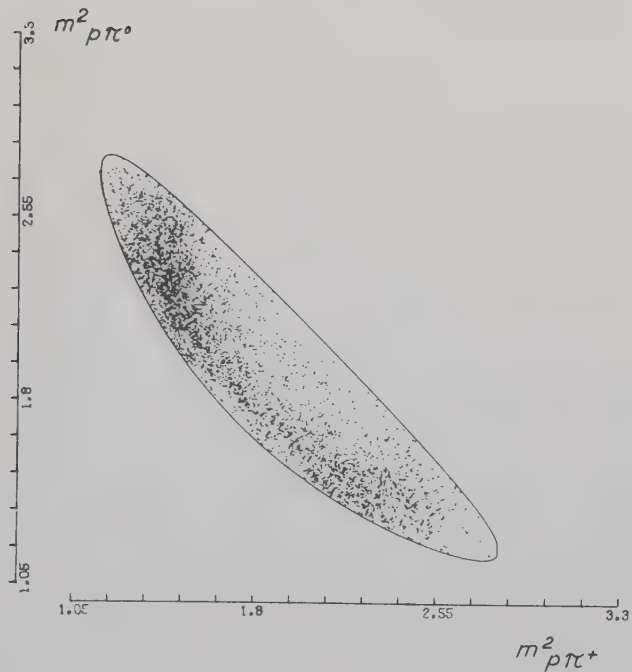
$W = 1.97 \text{ GeV}$

-a-



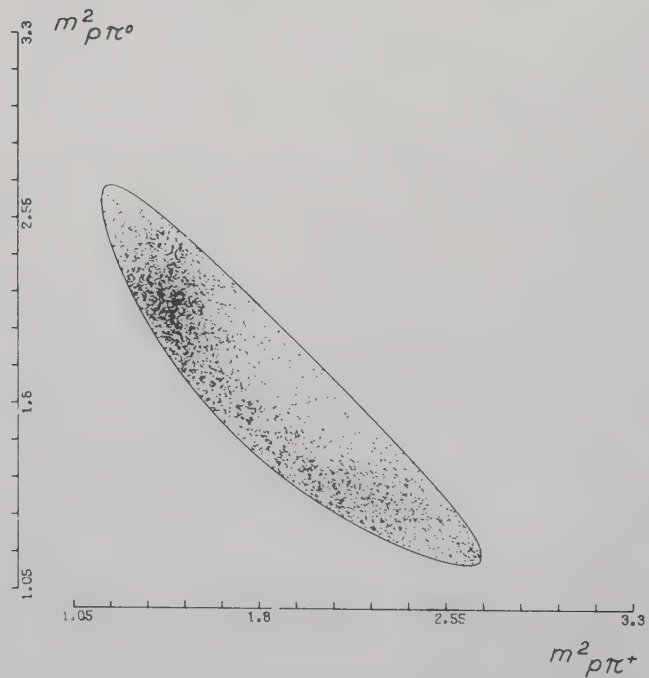
$W = 1.90 \text{ GeV}$

-b-



$W = 1.81$

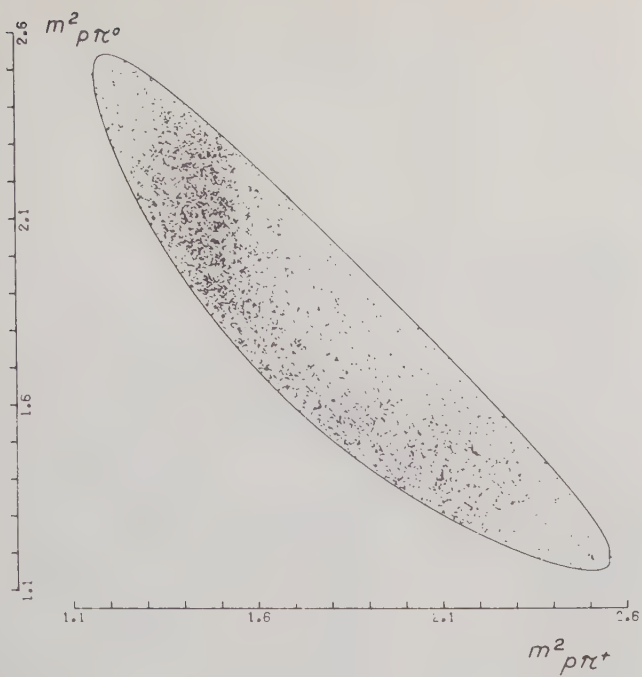
-c-



$W = 1.78$

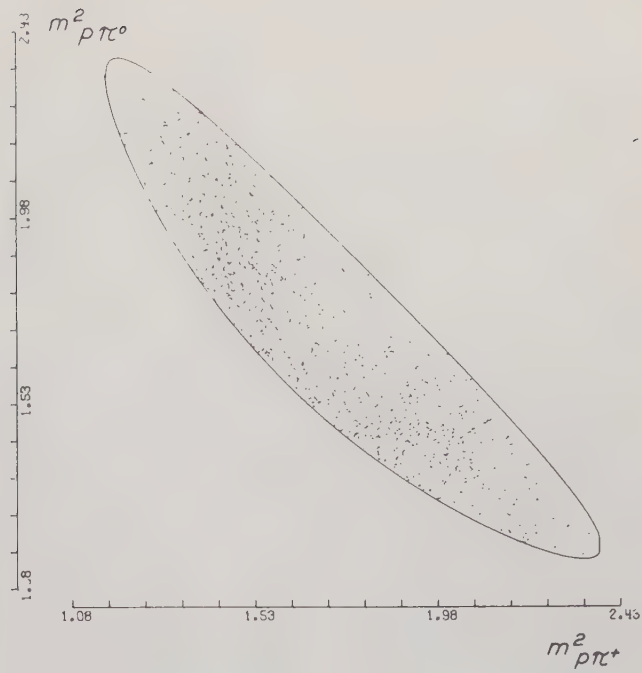
-d-

FIG. 6 (a.b.c.d.)



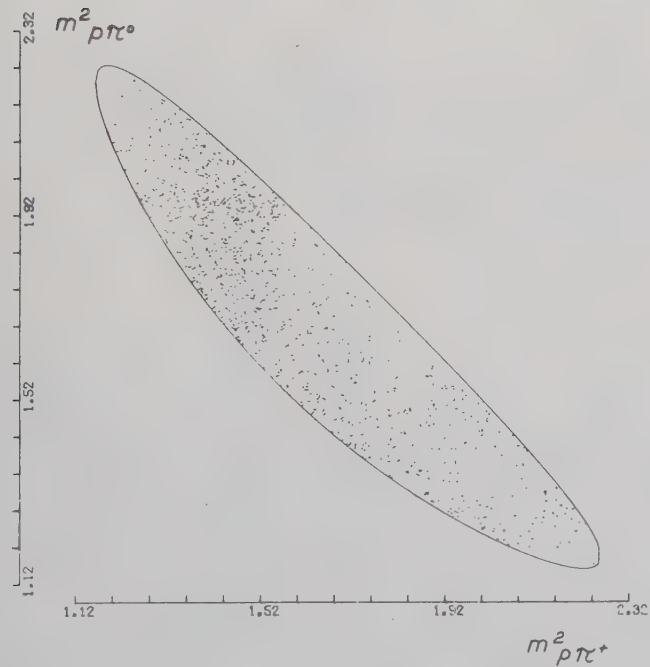
$W = 1.73 \text{ GeV}$

-e-



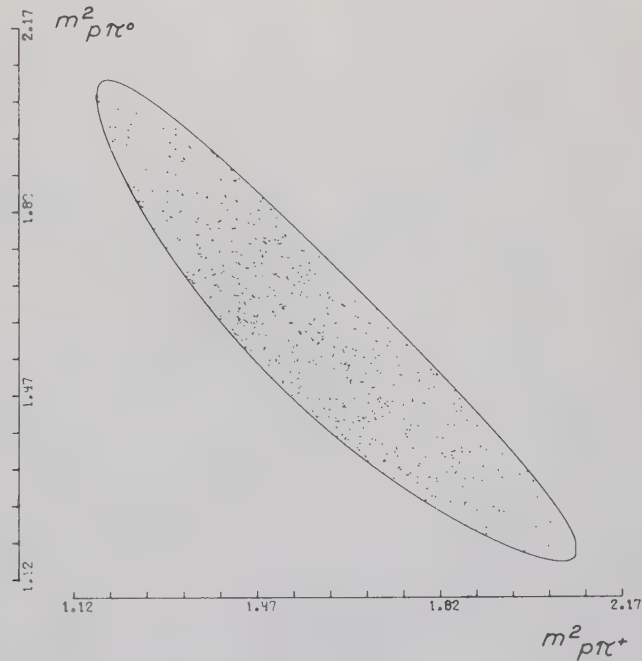
$W = 1.68 \text{ GeV}$

-f-



$W = 1.64$

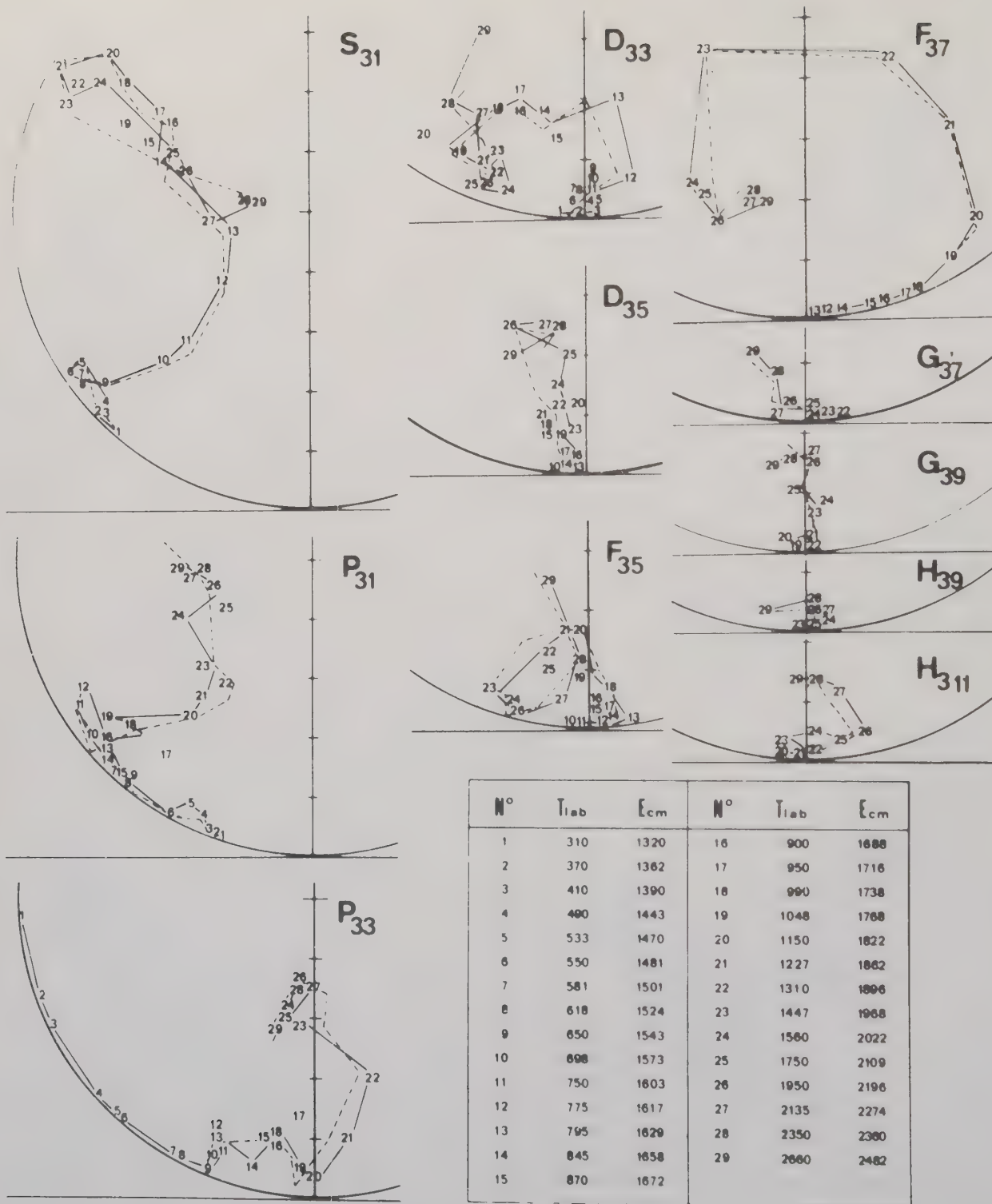
-g-



$W = 1.58$

-h-

FIG. 6 (e.f.g.h)



Diagrammes d'Argand des amplitudes élastiques d'isospin 3/2. Référence 12.

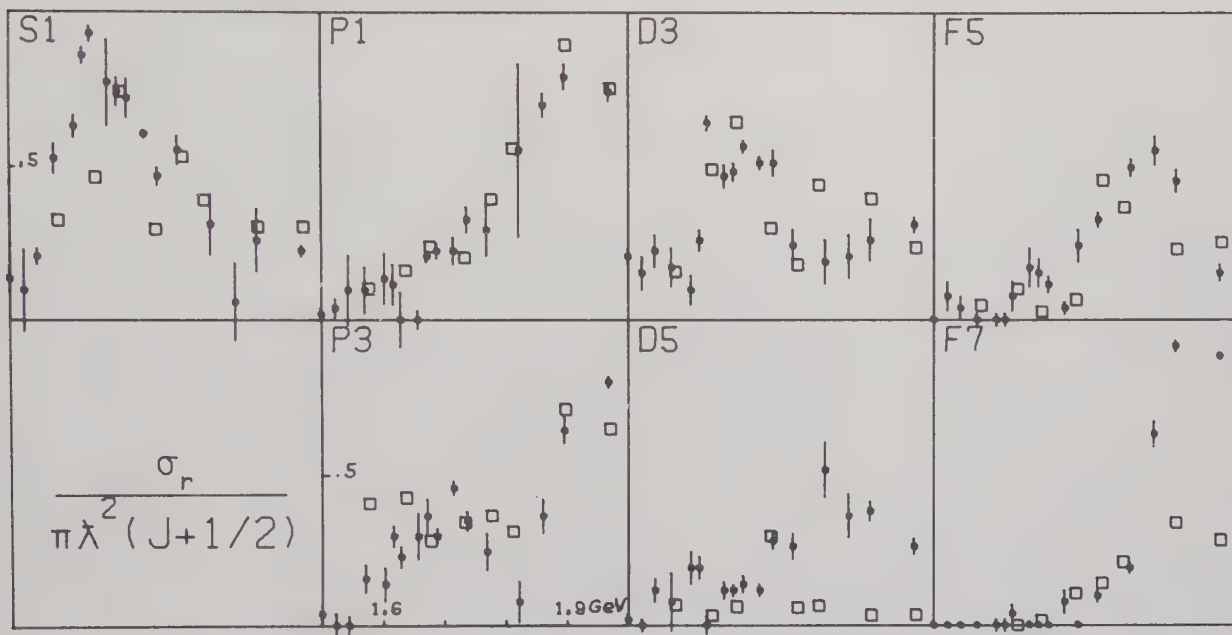


FIG. 8

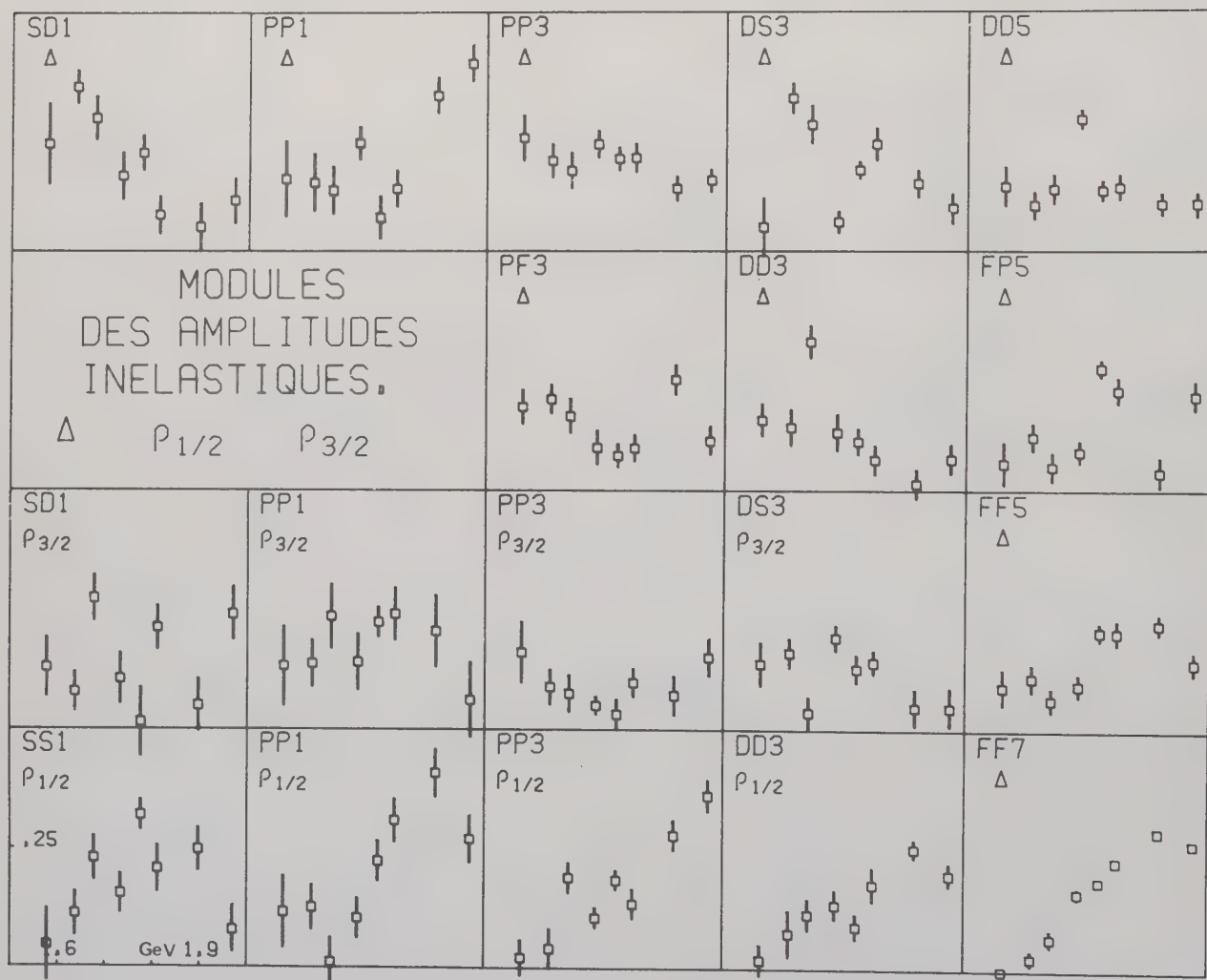


FIG. 9

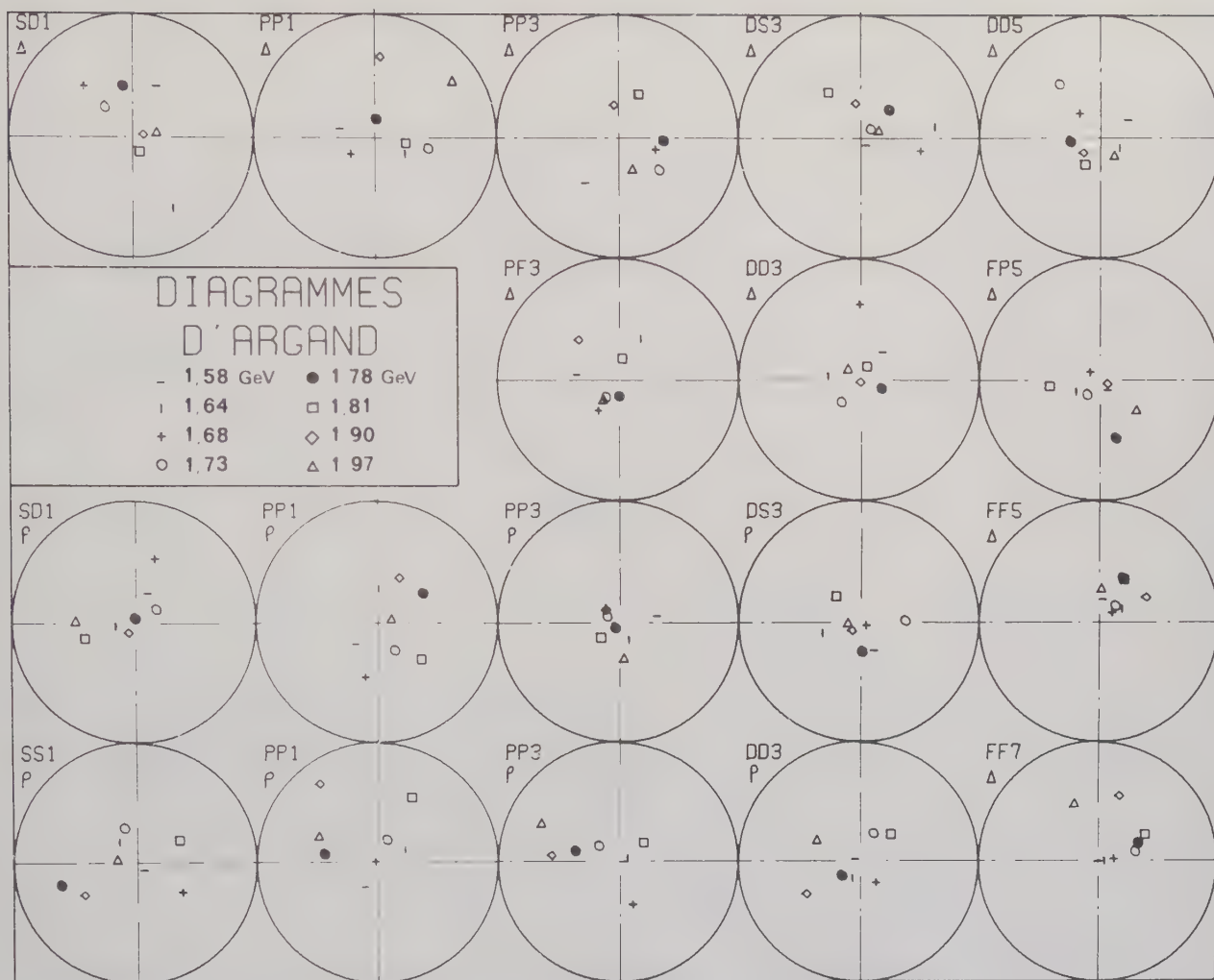


FIG. 10

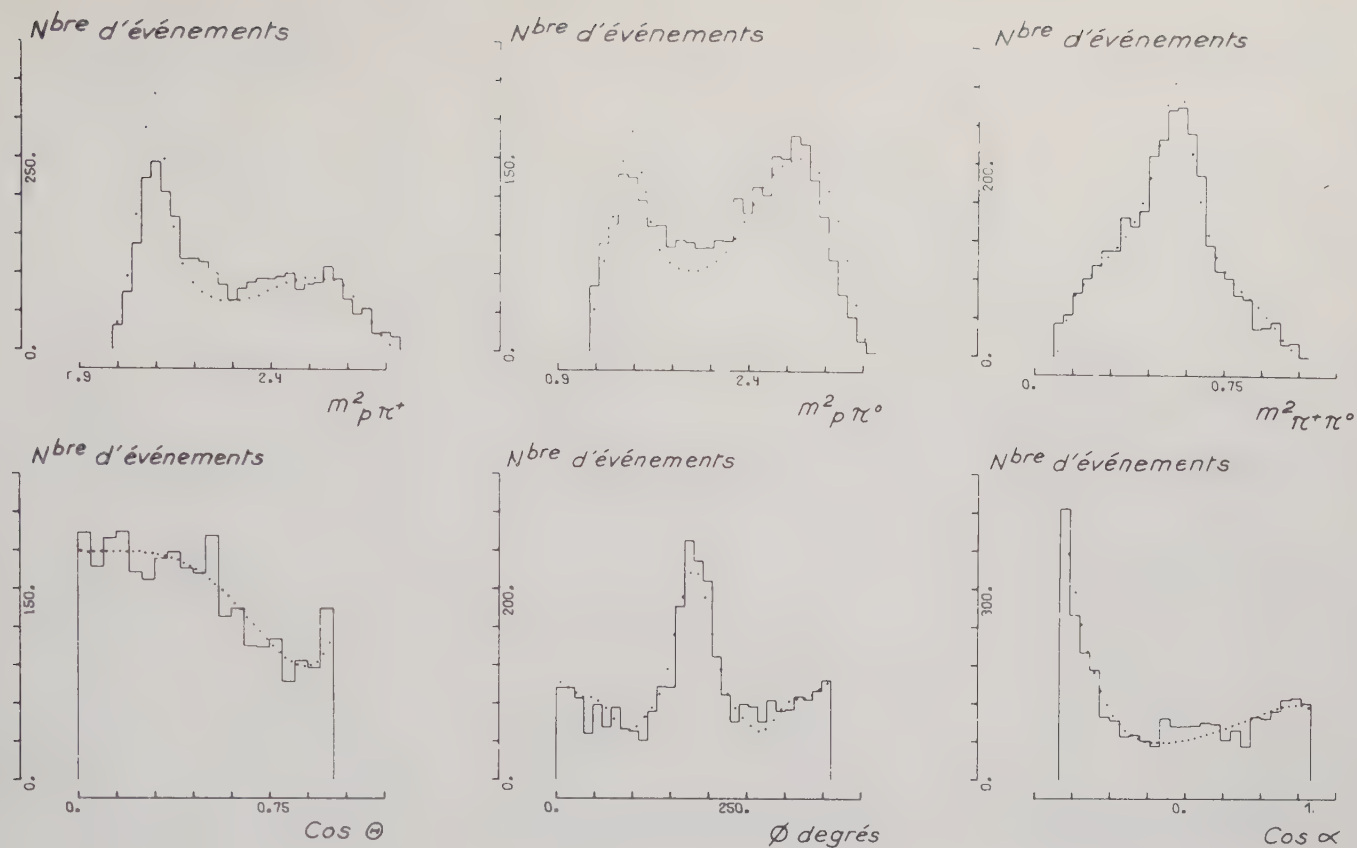


FIG. 12a $W = 1.97 \text{ GeV}$

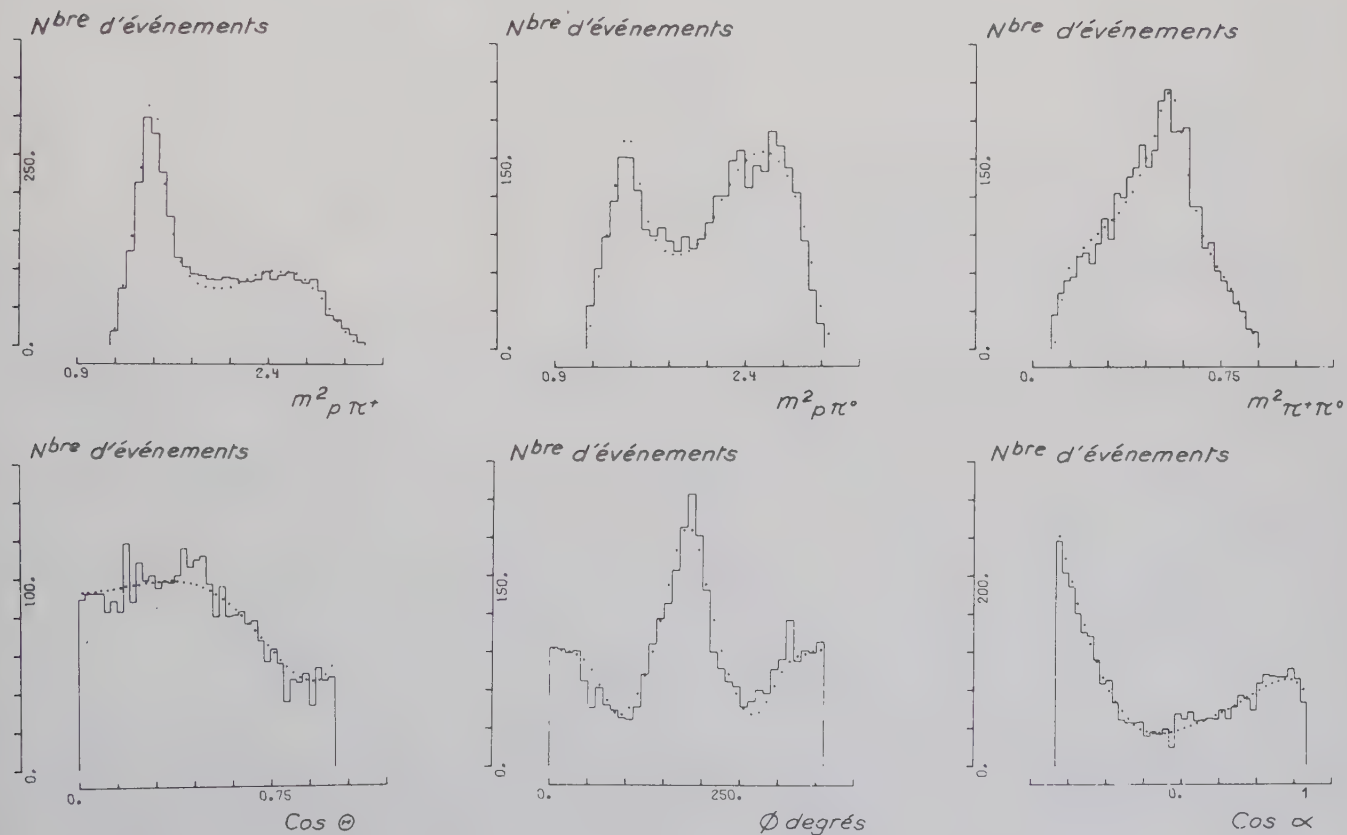


FIG. 12b $W = 1.90 \text{ GeV}$

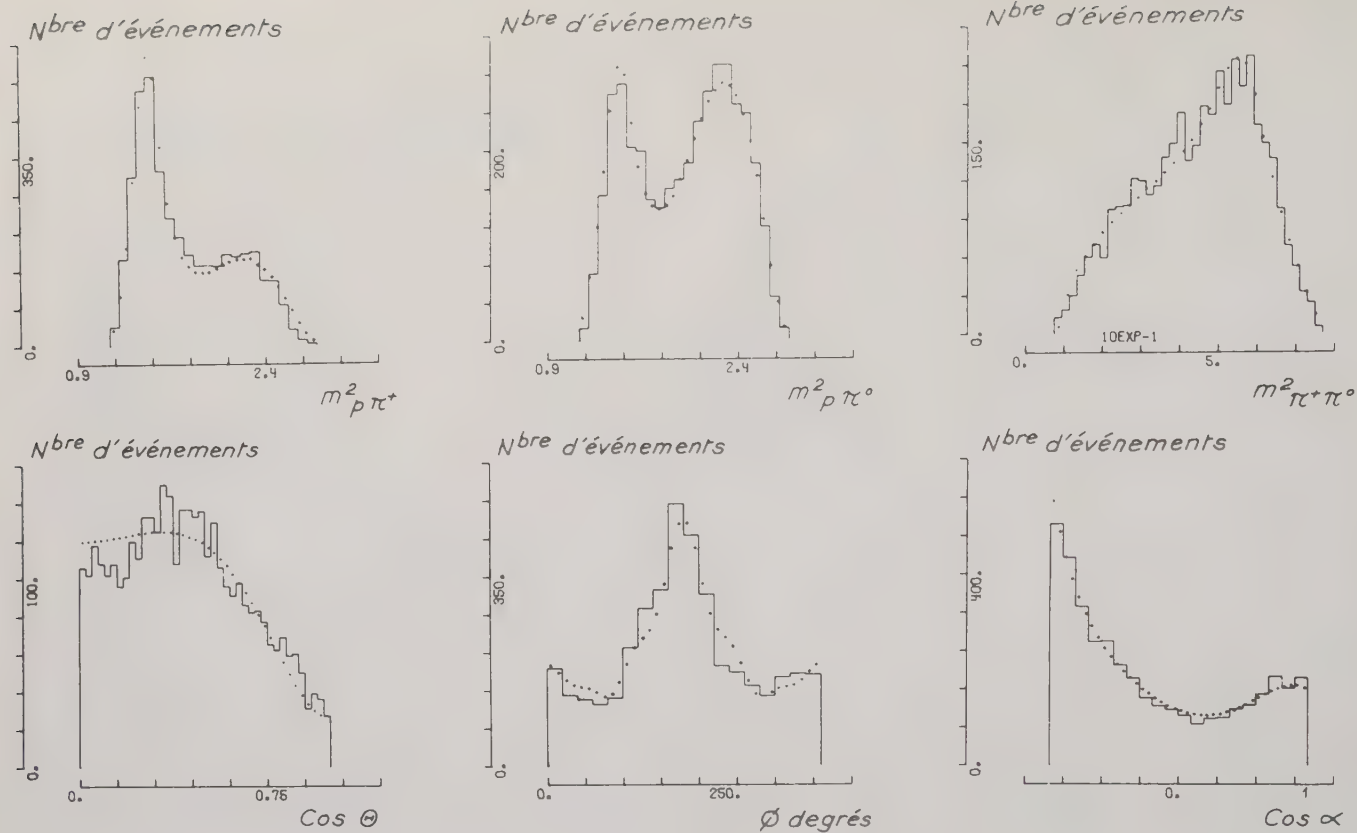


FIG. 12c $W = 1.81 \text{ GeV}$

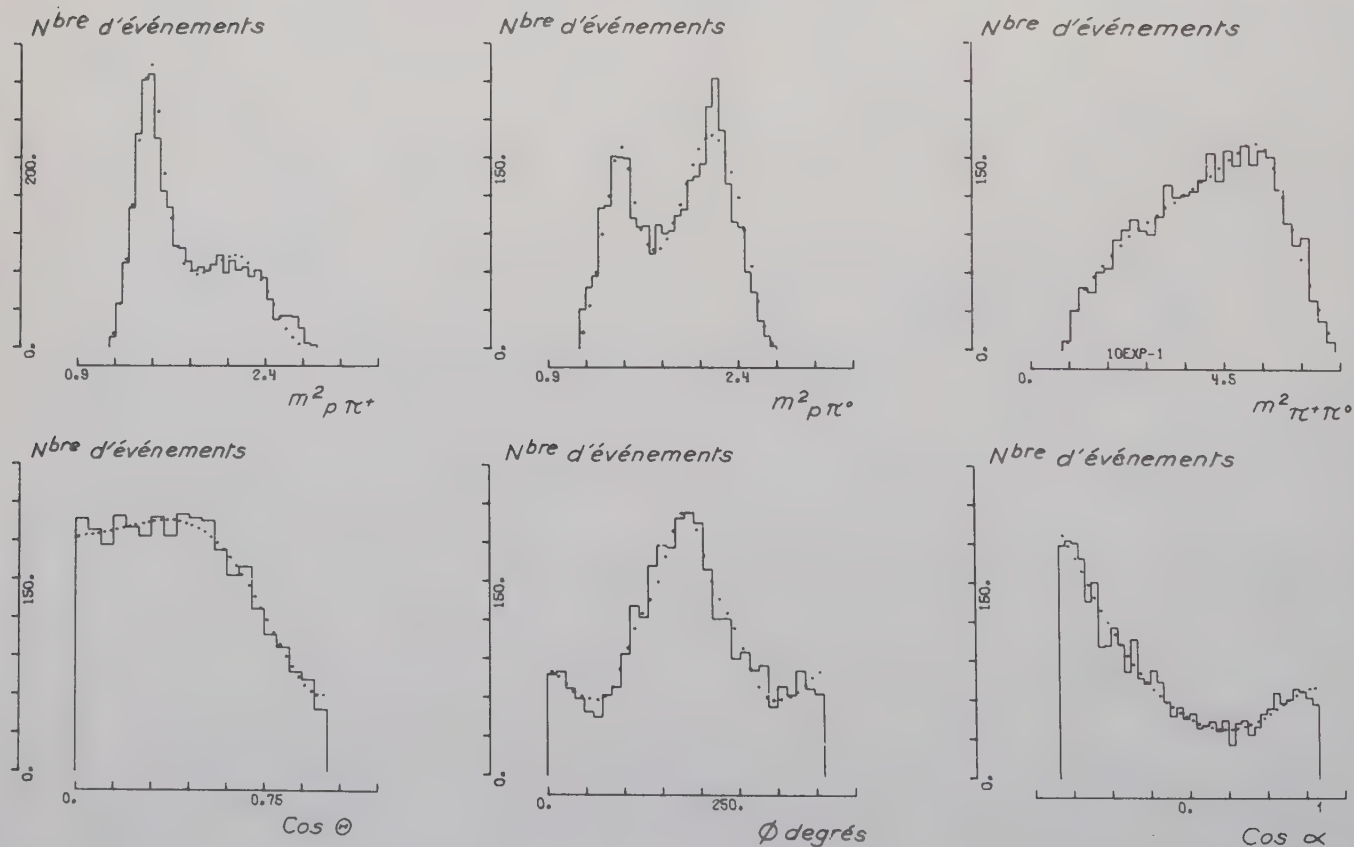
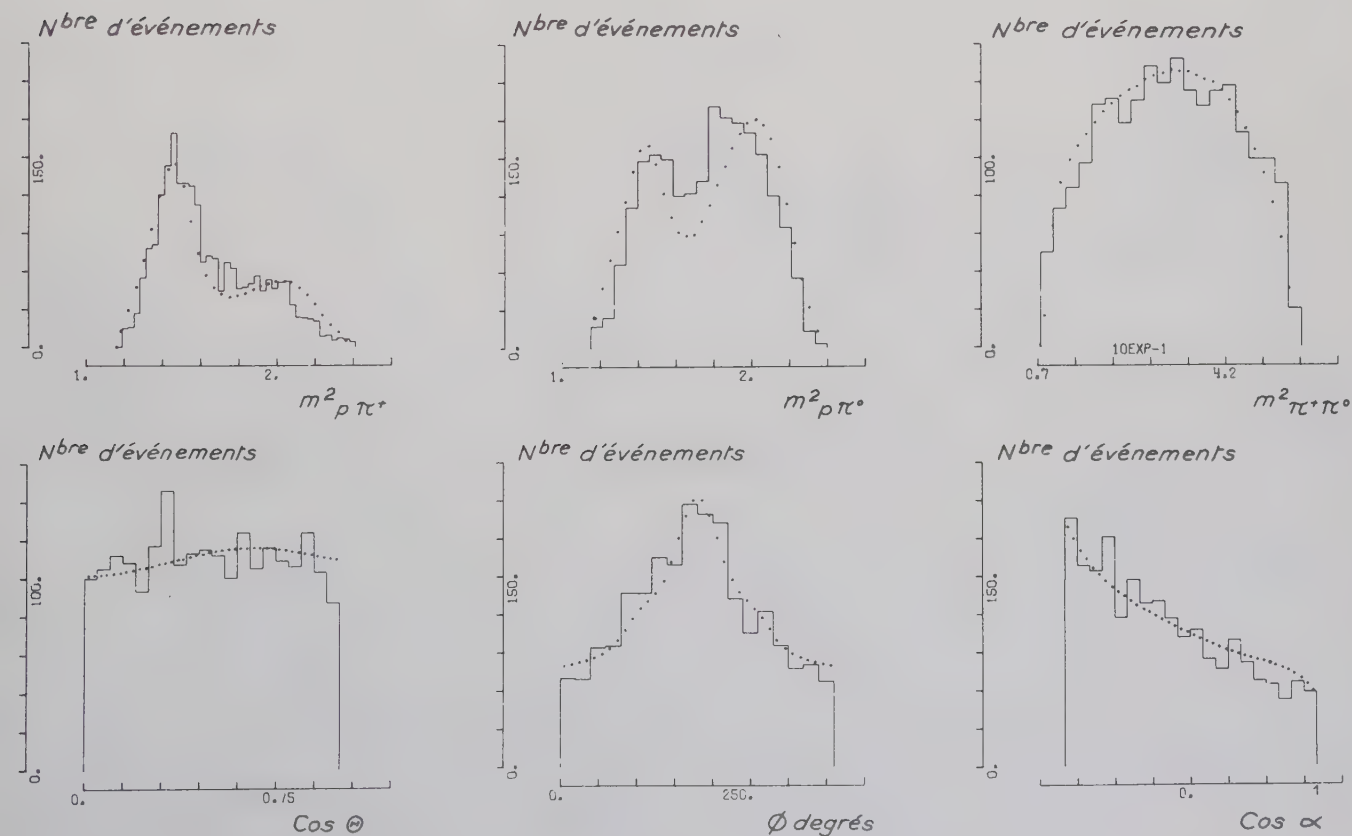
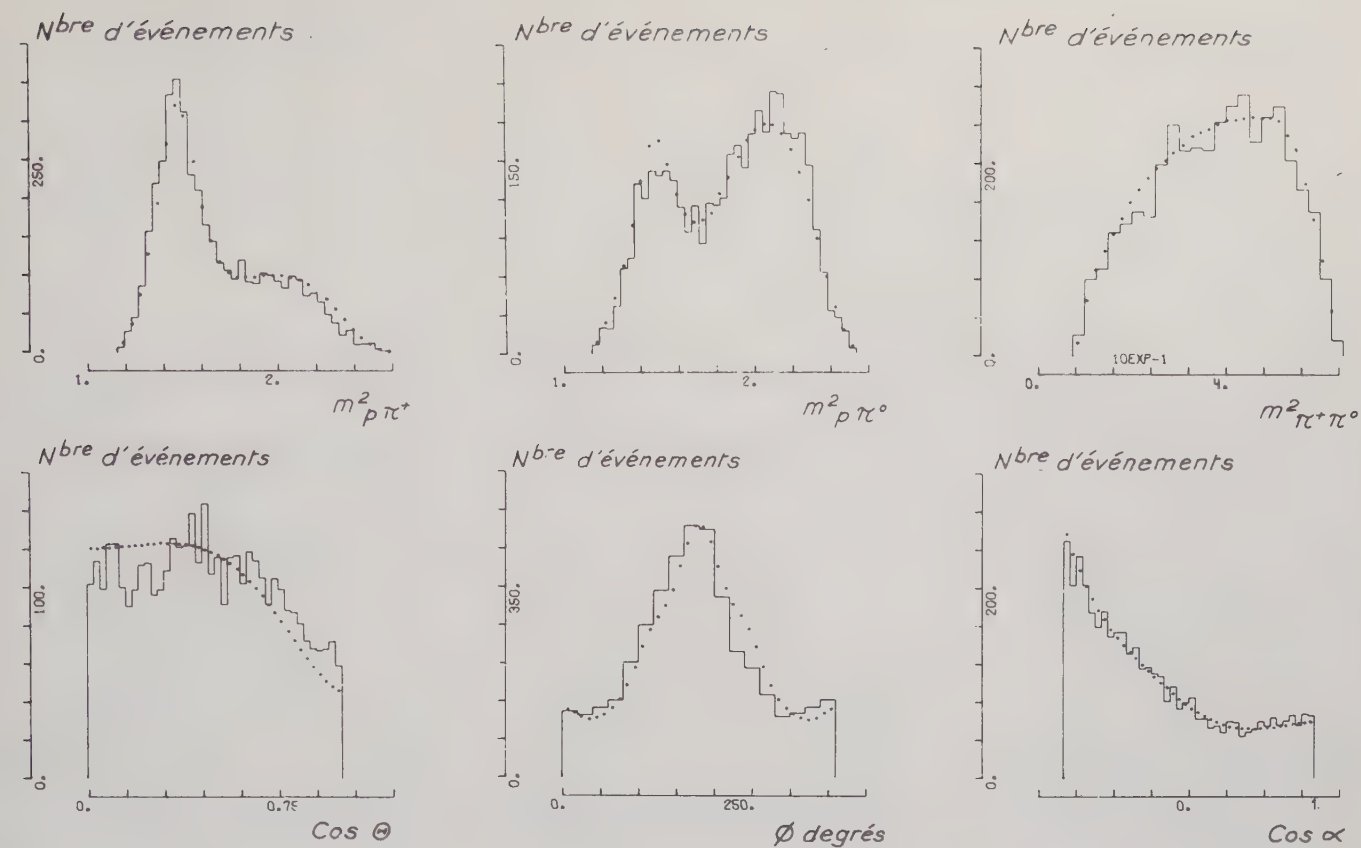


FIG. 12d $W = 1.78 \text{ GeV}$



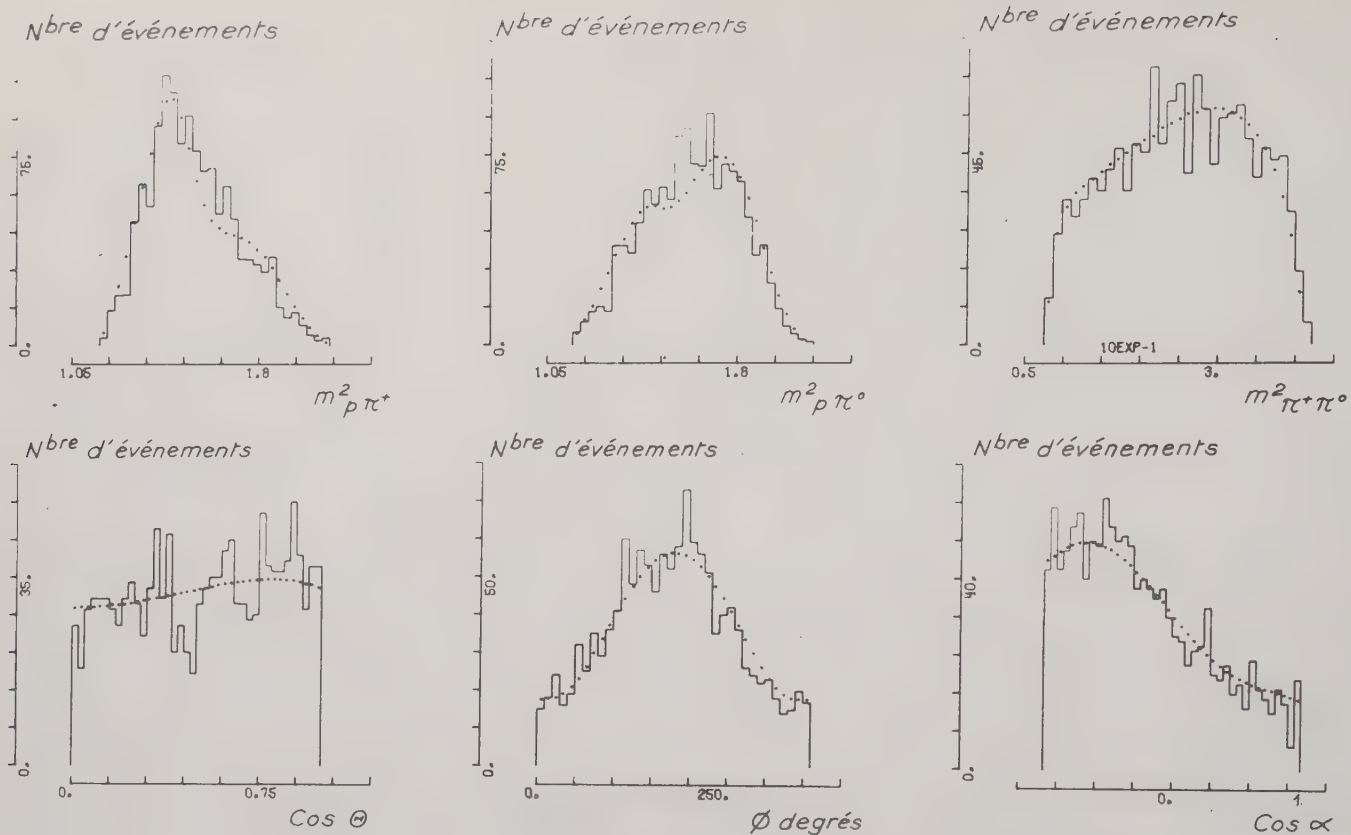


FIG. 12 g $W = 1.64 \text{ GeV}$

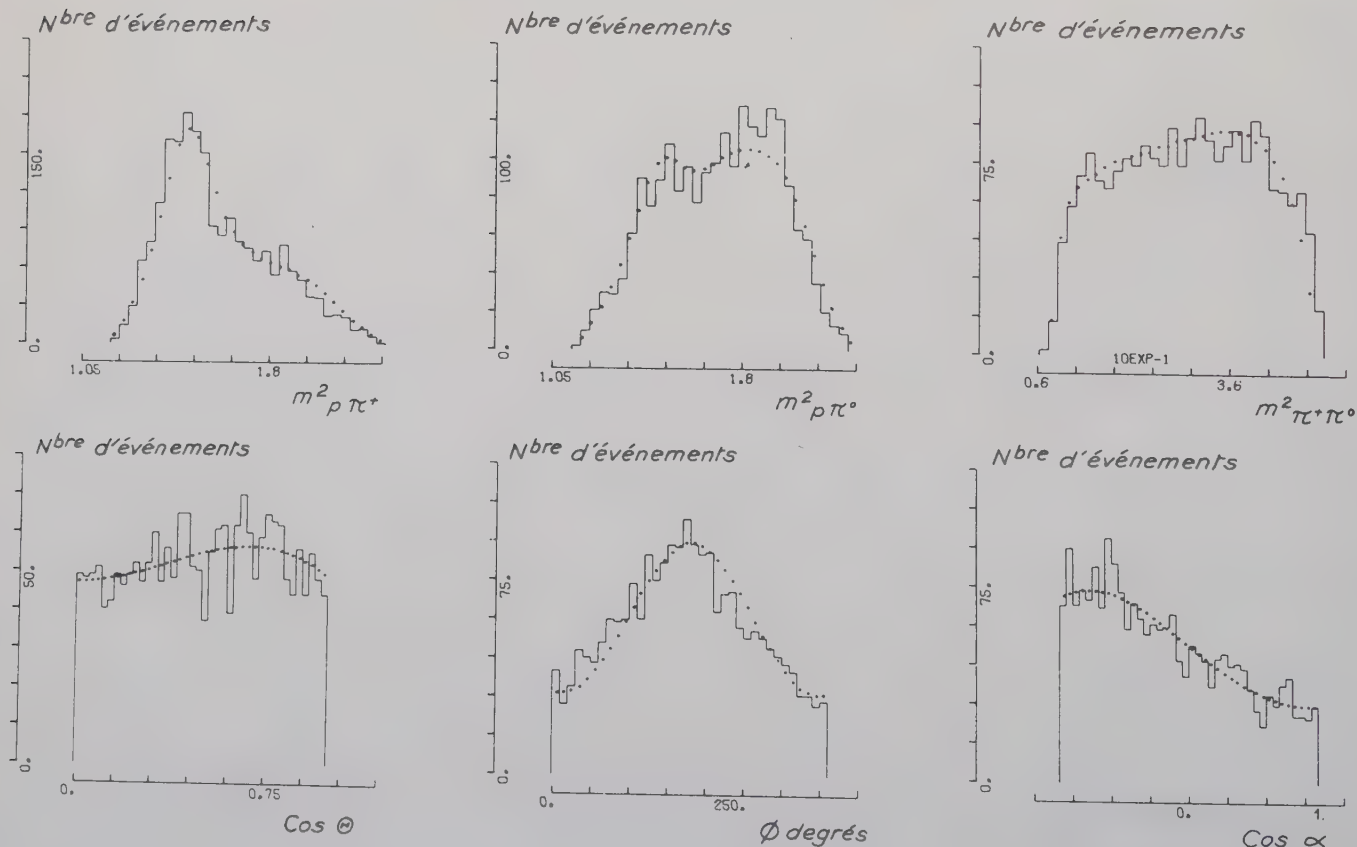


FIG 12 h $W = 1.58 \text{ GeV}$

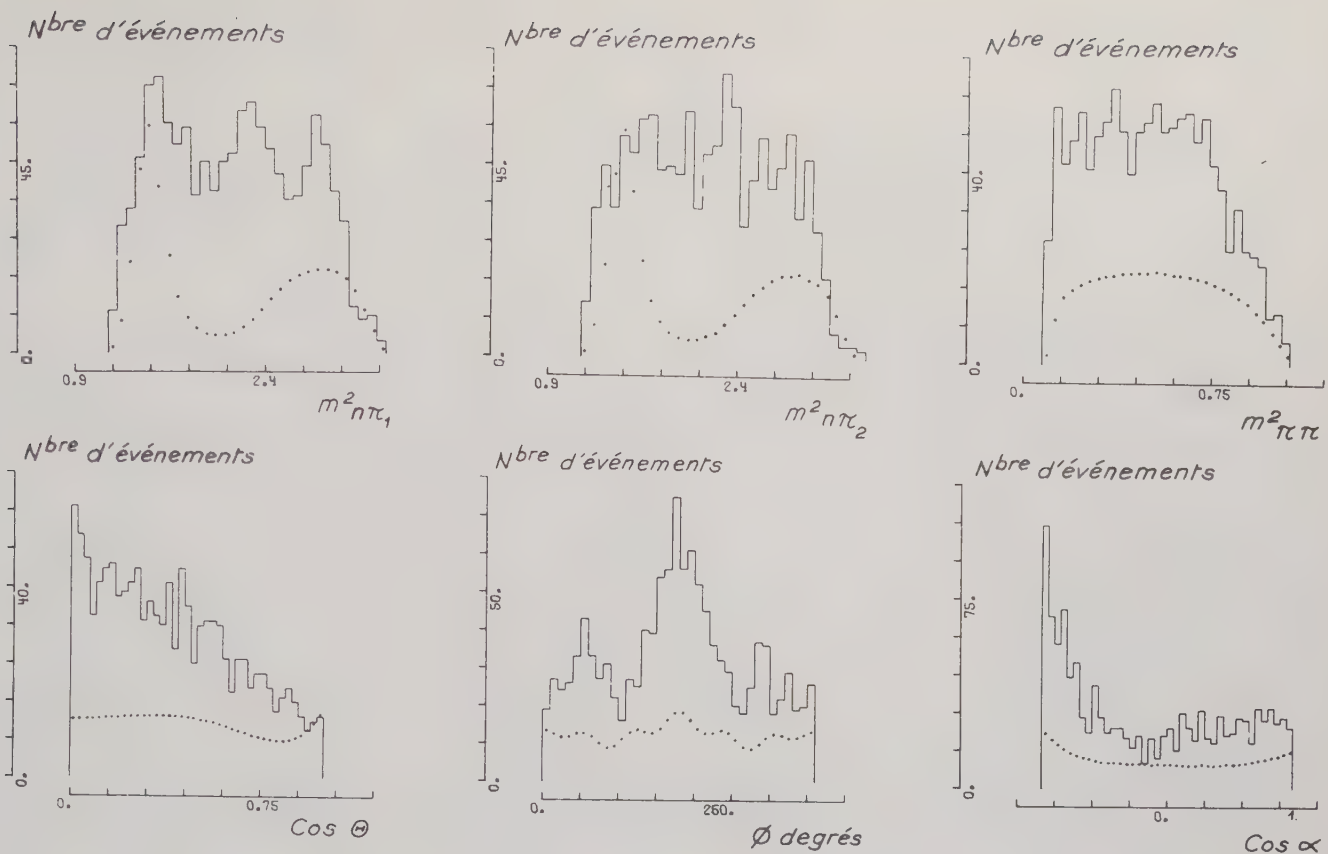


FIG. 13 a $W = 1.97 \text{ GeV}$

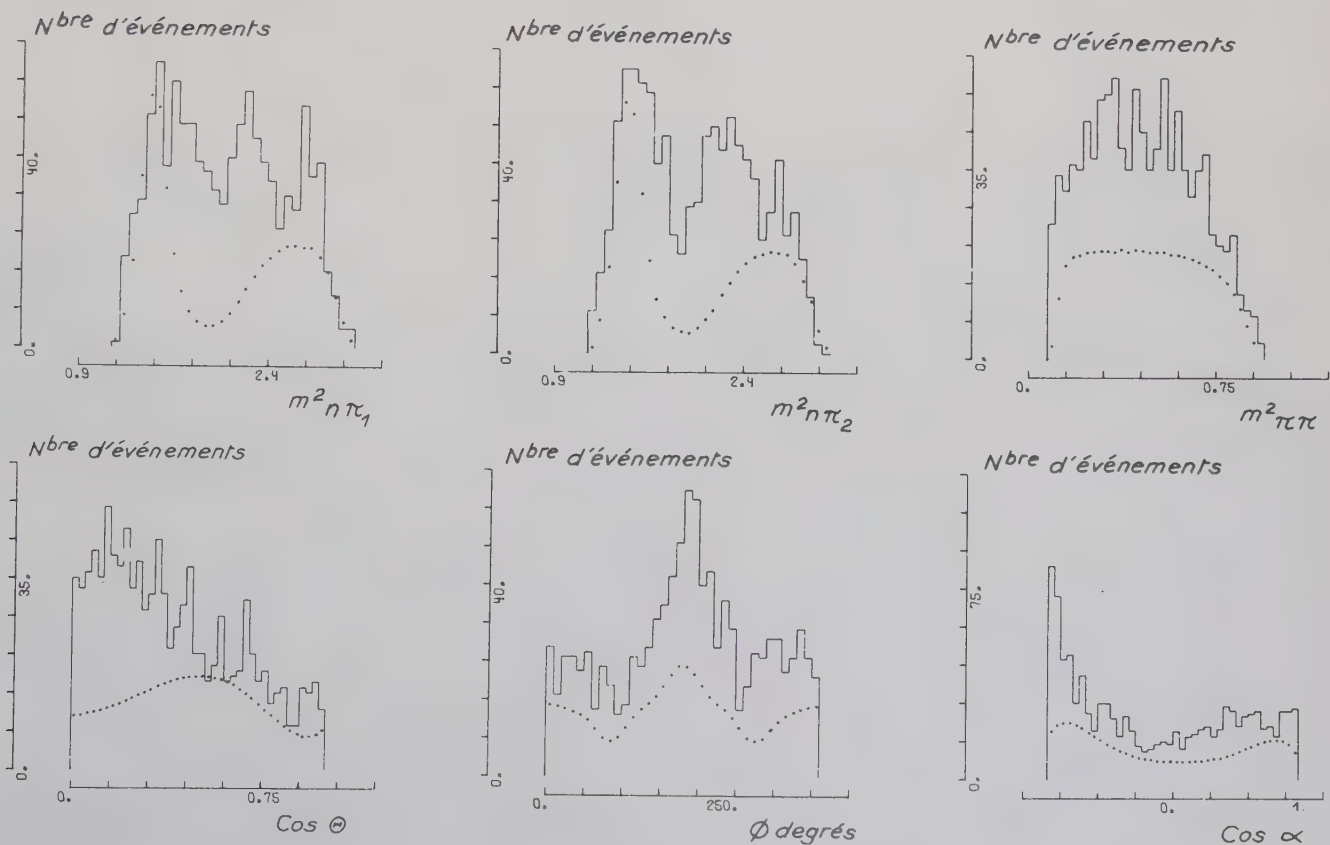


FIG. 13 b $W = 1.90 \text{ GeV}$

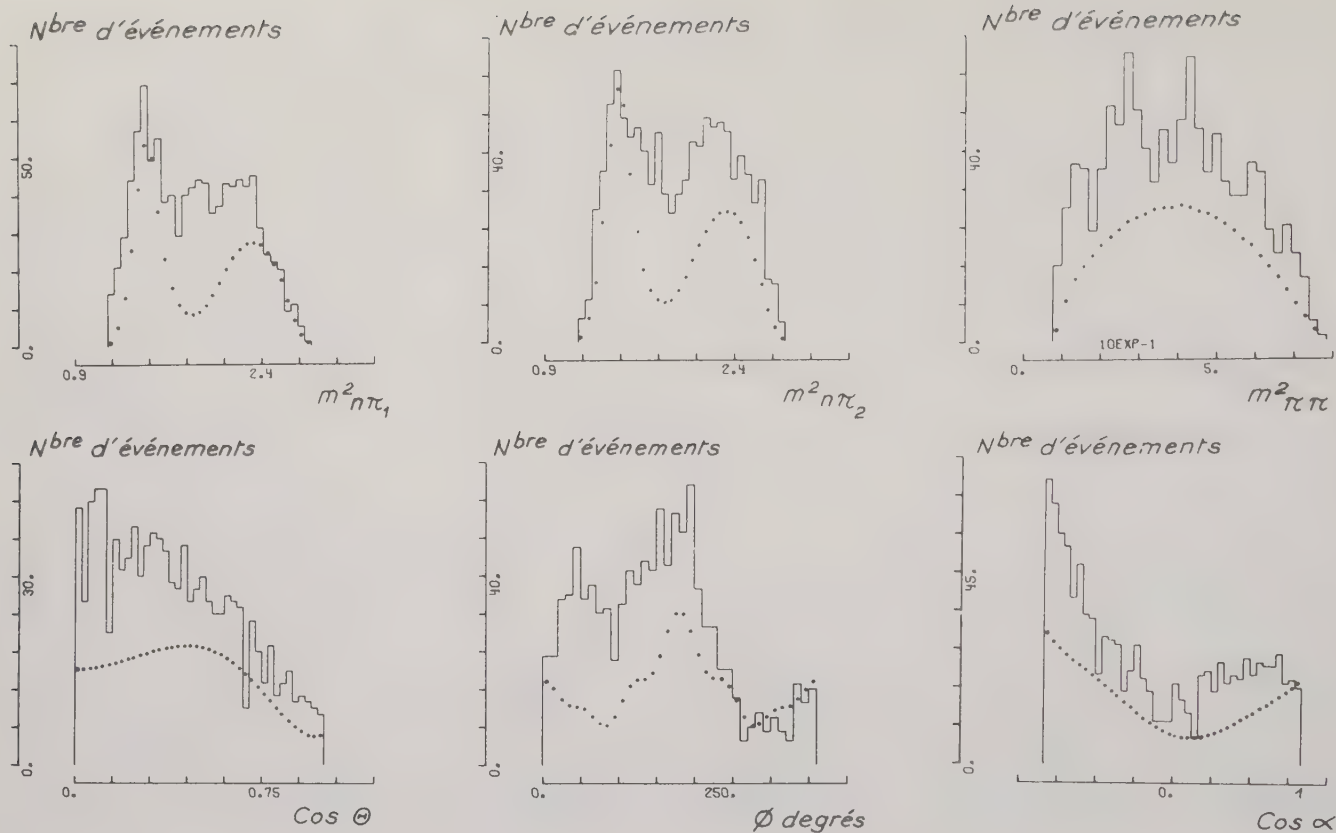


FIG. 13 c $W = 1.81 \text{ GeV}$

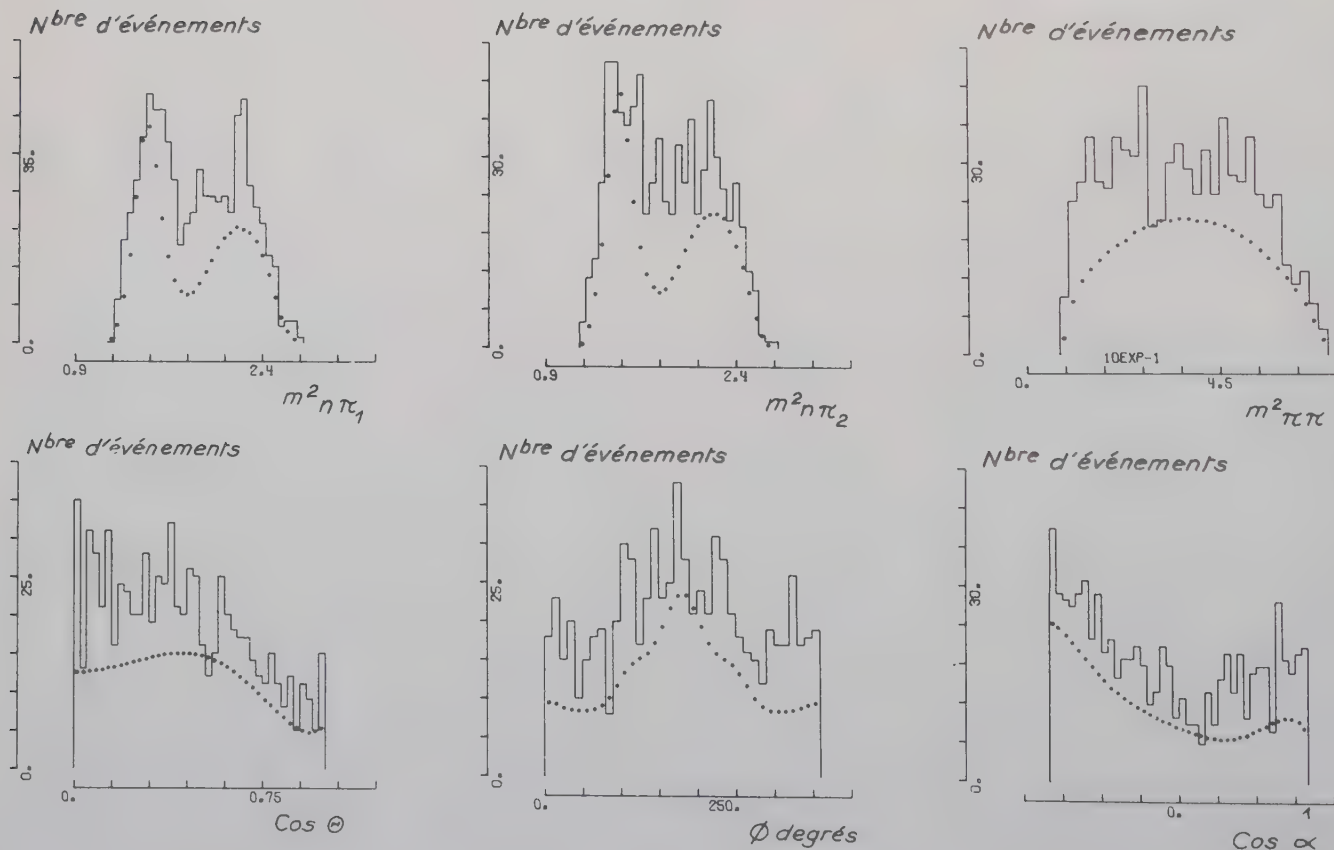


FIG. 13 d $W = 1.78 \text{ GeV}$

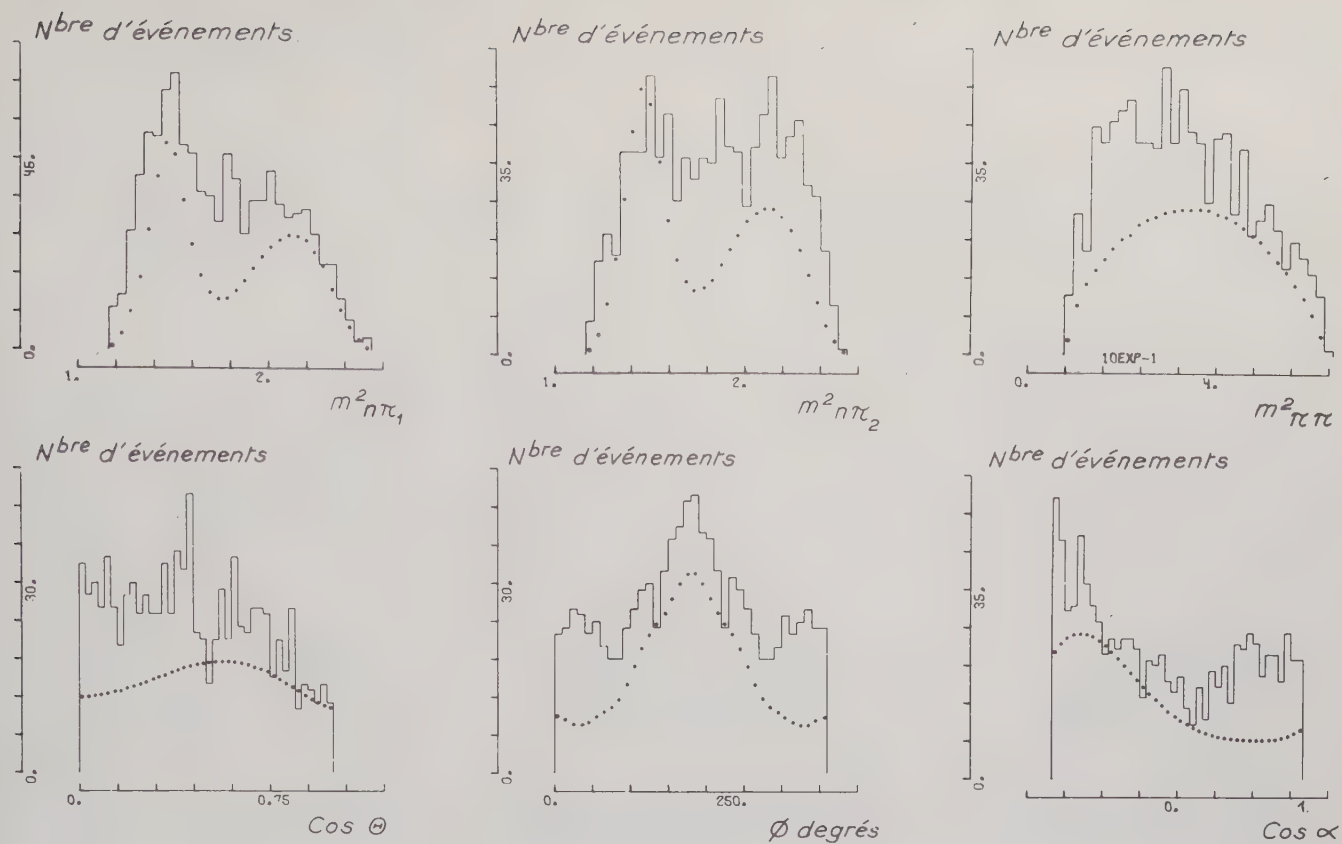


FIG. 13 e $W = 1.73 \text{ GeV}$

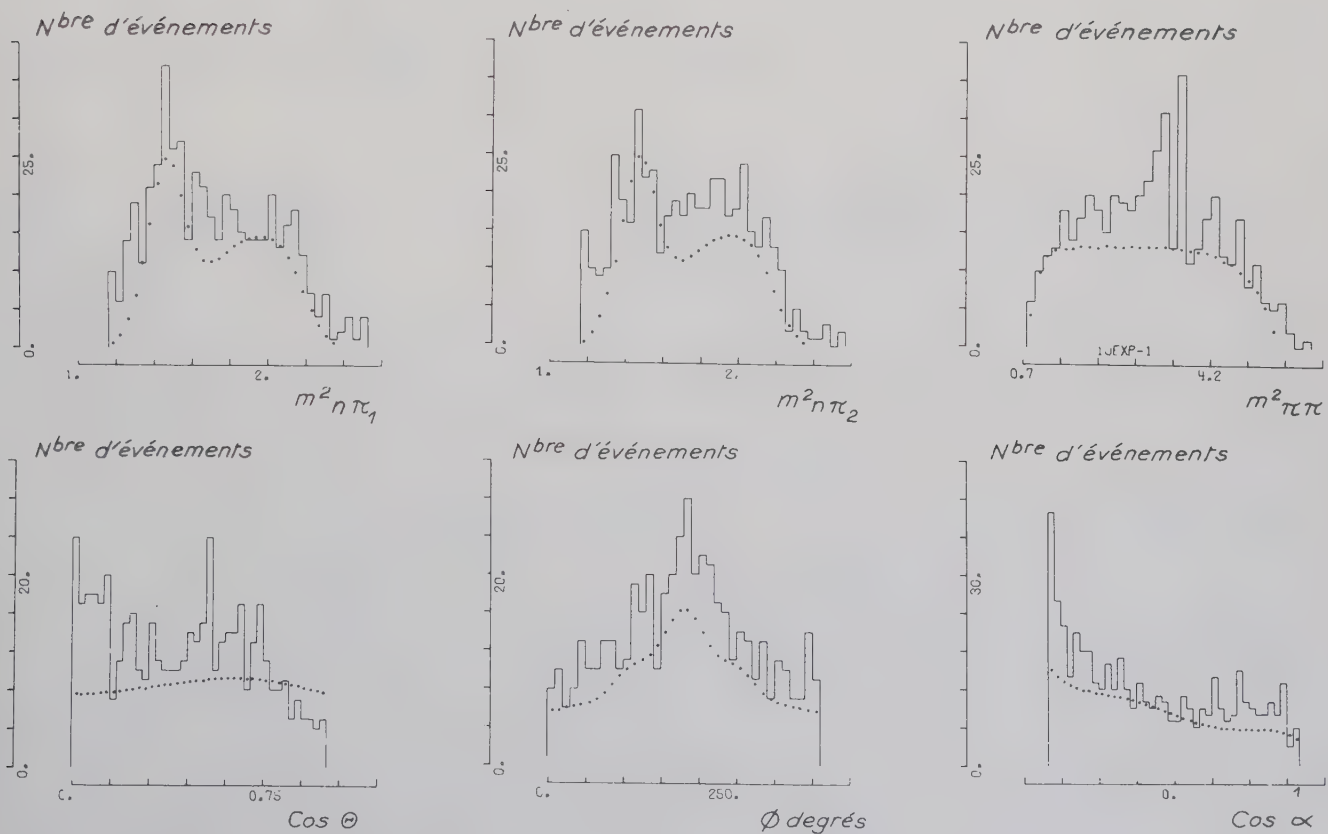


FIG. 13 f $W = 1.68 \text{ GeV}$

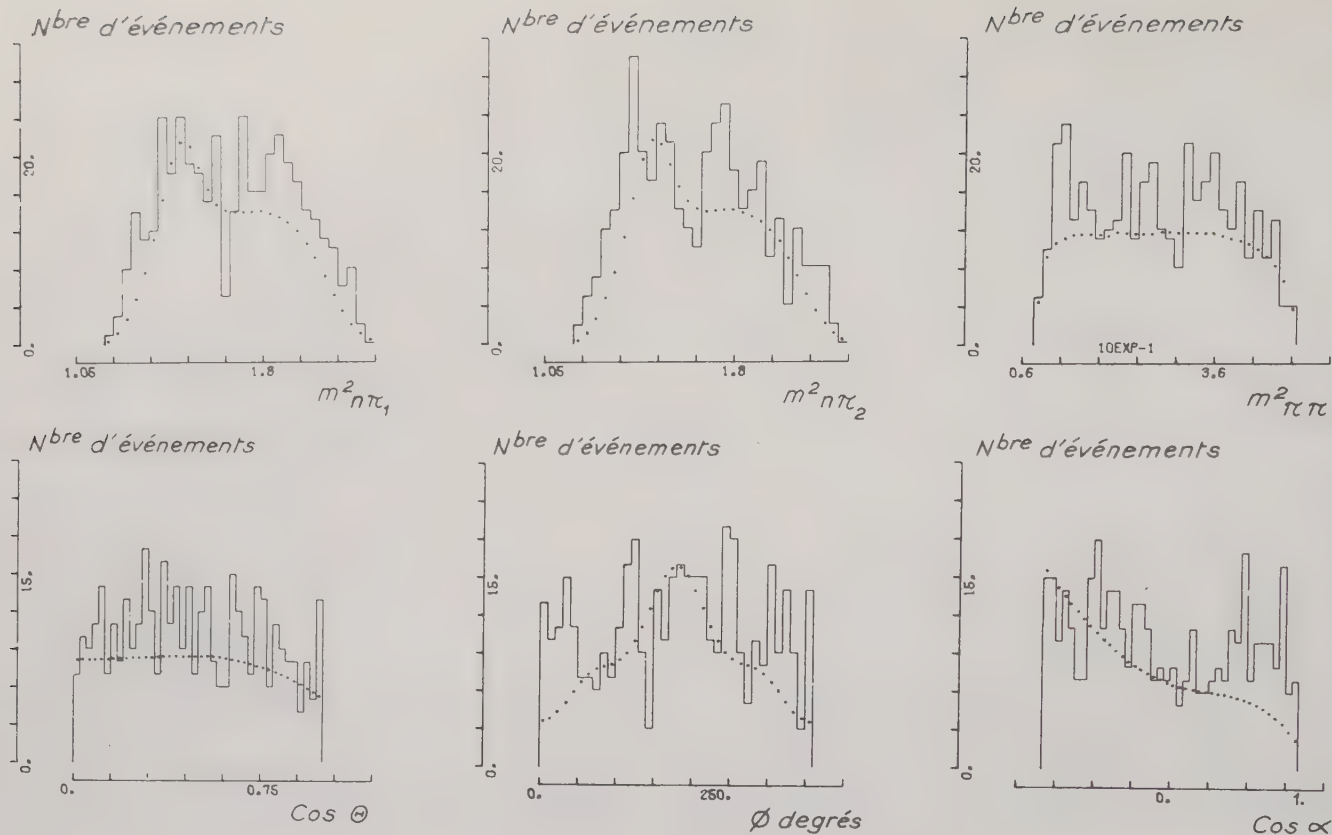


FIG. 13 g $W = 1.64 \text{ GeV}$

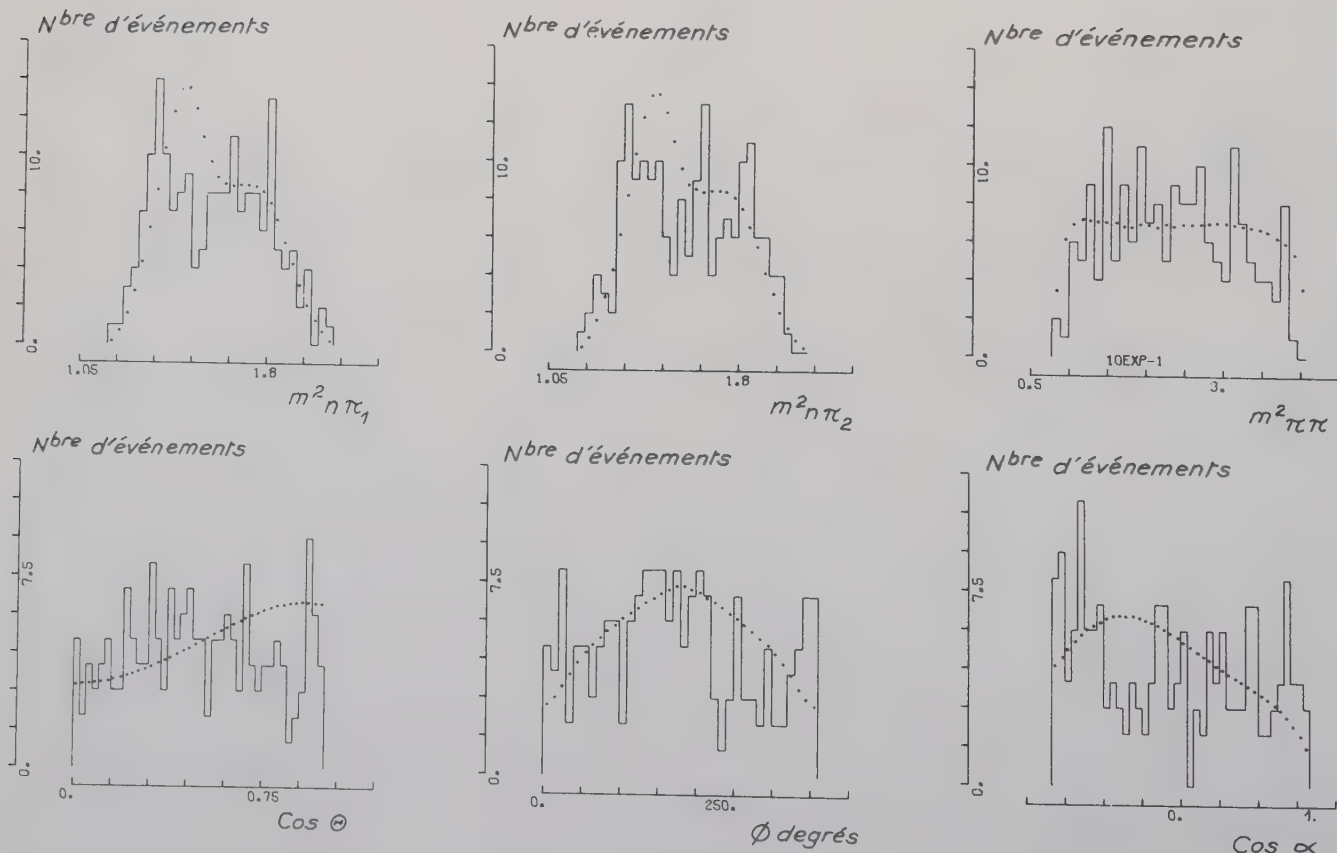


FIG. 13 h $W = 1.58 \text{ GeV}$

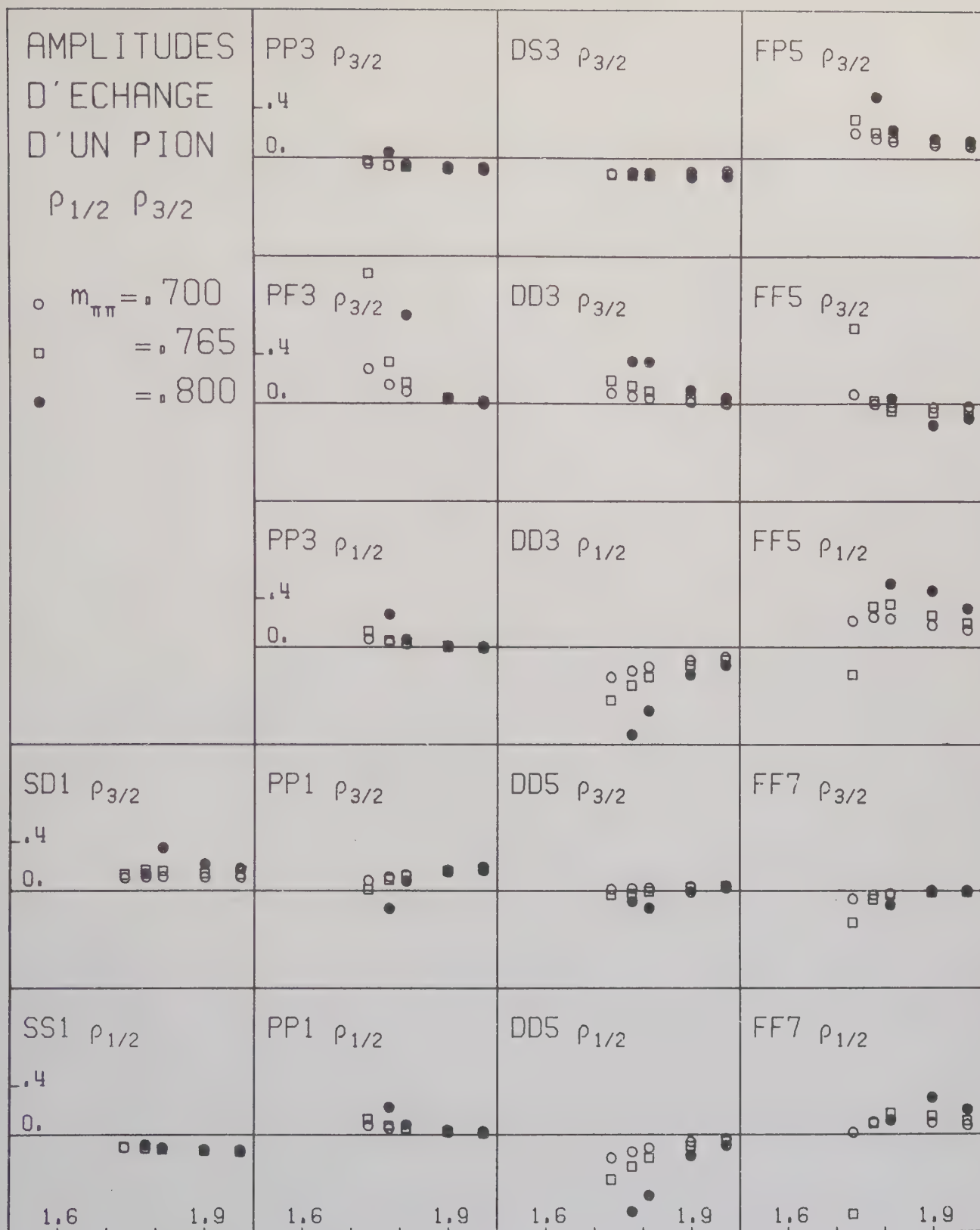


FIG. 14

